Romans

Sur la lisière des Forêts, par W. Sieroszewski. Souvenirs tragiques d'un déporté en Sibérie. Un volume (12 × 18,5 cm.).

Les Sourdiaux, par G. Maurière. Un volume (12 × 18,5 cm.).

CONTES ET ROMANS POUR TOUS

Collection pour la famille et la jeunesse : en de jolis volumes reliés, d'un prix très modique, des œuvres vraiment intéressantes et littéraires. (*Deux séries.*)

Série beige et or.

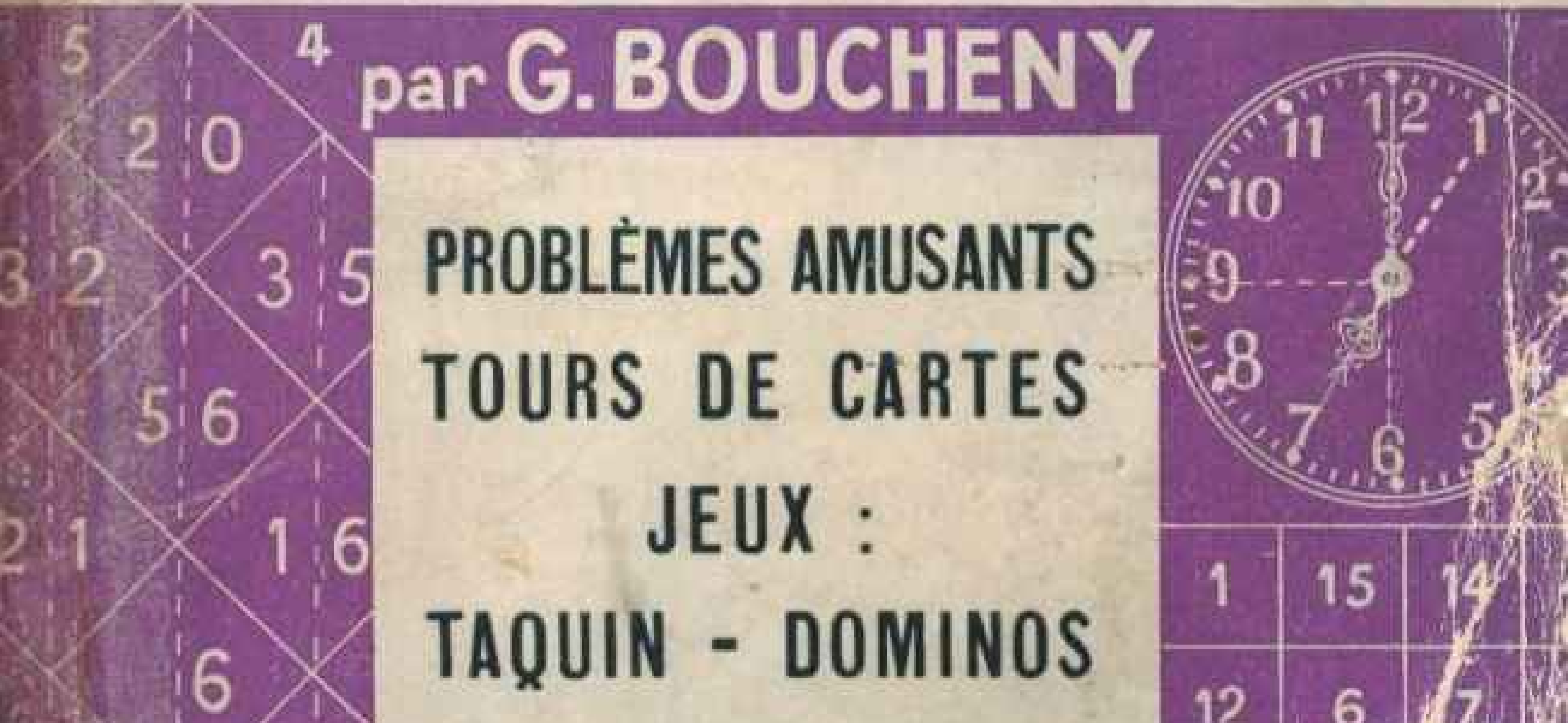
La Colombe (*Impressions de voyage en Suisse*), par Alexandre Dumas père.
Maître Adam le Calabrais, par Alexandre Dumas père.
La Belle-Jenny, par Th. Gautier.
Un drame sous la Régence, par V. Bonhoure.
L'Agent secret, par J. Conrad.
L'Astre d'épouvante, par Gustave Le Rouge.
Dinah Miami, par P. Mac Orlan.
Aristide Pujol, par W. J. Locke.
Les Guetteurs, par A. E. W. Mason.
Un Coup de fortune, par Rudyard Kipling.
Le Grand Cataclysme, par Henri Allorge.
Beau Geste, par le major Wren.
Veillées corses, par L. de Bradi.
Histoires merveilleuses, par H. G. Wells.
La Cocarde blanche, par Arnould Galopin.
Les Olympiques, par Henry de Montherlant.
Les Sourdiaux, par G. Maurière.
La Fille du Capitaine, par A. S. Pouchkine.
Le Trésor de Châteauvieux, par V. Bonhoure.
Les Trois Messieurs de Kéravel, par J. de Kerlecq.
Vendetta, par L. de Bradi.
La Vallée du soleil, par D. de Pereyra.
L'Homme qui fuit, par P. Demousson.
Bernadou, par Aimé Lafont.

Série rouge et or (jeunesse).

La Montagne du silence, par Henri Bernay.
Derradji, fils du désert, 1 vol. — **Yvonne au pays de Derradji,** 1 vol. — par R. Maublanc.
La Pastille mystérieuse, par Henri Bernay.
Pedrito, par J.-D. Roustan.
On a volé un Transatlantique, par H. Bernay.
La Bête dans les neiges, par Fr. Parn.
Le Secret de la Sunbeam Valley, par H. Bernay.
L'Homme qui dormit cent ans, par H. Bernay.
Noëls fantastiques, par Ch. Dickens.
Le Targui, par P. Demousson.
La Fortune errante, par H. Bernay.
Le Raid fantastique, par E. de Riche.
Urfa, par J. de Kerlecq.
Bob et son chien Médard, par Ch. Quinel et A. de Montgon.
Basile le Macédonien, par V. Bonhoure.
L'As de la route, par J. Goublet.
L'Armure du Magyar, p. H. Bernay.
Pierre et sa mère, par J. Grandey.
Les Chasseurs de papillons, par H. Bernay.
Slim Kerrigan, par L. Boutinon.
Le Brick en dérive, par H. Bernay.
Sumatra, par E. de Keyser.
Hank le trappeur, par L. Boutinon.
Le Dragon volant, par H. Bernay.
Les Mésaventures de Pickwick, par Ch. Dickens.

CURIOSITÉS & RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

par G. BOUCHENY



PROBLÈMES AMUSANTS

TOURS DE CARTES

JEUX :

TAQUIN - DOMINOS

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

CARRÉS MAGIQUES

NOMBRES CROISÉS

PARADOXE : 1 = 2

LAROUSSE - PARIS

CURIOSITÉS ET RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

En collaboration avec A. GUÉRINET et R. FRANCK :

Précis d'Arithmétique, à l'usage de l'Enseignement du premier et du second degré. Un volume de 452 pages (f[t] 13,5 × 20 cm.), 430 figures et croquis, 2000 problèmes et exercices.

En collaboration avec A. GUÉRINET :

Cours d'Arithmétique (Enseignement du premier degré). Quatre livres, partie de l'*élève* et partie du *maître.*

L'Arithmétique, la Géométrie, l'Algèbre, la Comptabilité, à l'école primaire supérieure et au cours complémentaire. Quatre livres, partie de l'*élève* et partie du *maître.*

A LA MÊME LIBRAIRIE

Qu'est-ce que... *le hasard? l'énergie? le vide? la chaleur? la lumière? l'électricité?* etc., par M. BOLL, docteur ès sciences. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 152 gravures.

Pour connaître... *la relativité, l'analogie, l'inertie, la gravitation, le choc,* etc., par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 145 gravures.

Idées nouvelles sur... *l'électron, les piles, les dynamos, l'alternatif, l'induction,* etc., par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 180 gravures.

L'Électricité *à la ville, à la campagne, en auto,* par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 174 gravures, 2 hors-texte.

La Chimie *au laboratoire et à l'usine, dans la nature et dans la vie,* par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 250 gravures, 20 tableaux.

La Chance et les Jeux de hasard. *Loterie, boule, roulettes, baccara, 30 et 40, dés, bridge,* etc., par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 155 gravures.

Les Deux Infinis. *Galaxies, étoiles, planètes, micelles, réseaux, noyaux, neutrons, photons,* par M. BOLL. Un volume (f[t] 13,5 × 20 cm.), 126 figures.

CURIOSITÉS
ET
RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

par Gaston BOUCHENY
Professeur honoraire de mathématiques
au Collège Sainte-Barbe.

52 GRAVURES

LIBRAIRIE LAROUSSE — PARIS (VIe)
13 à 21, rue Montparnasse, et boulevard Raspail, 114

PRÉFACE

Chez tous les peuples anciens qui ont étudié les sciences, il est probable qu'il a été proposé et résolu des problèmes amusants, *c'est-à-dire des problèmes qui frappent l'esprit et piquent la curiosité, soit par des énoncés d'une conception amusante, soit par l'ingéniosité des solutions ou encore par l'intérêt des résultats auxquels ils conduisent.*

Toutefois, ce sont les Grecs qui nous ont légué les premiers exemples de jeux ou récréations mathématiques. *On trouve un certain nombre de ces récréations dans Diophante qui, le premier, a proposé des problèmes conduisant à une indétermination. Depuis cette époque jusqu'au XVI*[e] *siècle, le nombre de traités relatifs à ces jeux récréatifs est considérable ; puis l'étude de ces questions a été peu à peu abandonnée ou du moins n'a plus été cultivée que par certains esprits curieux qui trouvent dans cette occupation une satisfaction intellectuelle de tout premier ordre.*

*Après Diophante, il convient de citer l'*Anthologie grecque, *collection d'épigrammes réunies en un volume à diverses époques ; ce sont en réalité des problèmes amusants d'arithmétique. Parmi ces poèmes se trouvent des problèmes plaisants dont on a donné des versions latines. L. Chavignaud, ancien professeur à l'Institution Rollin, a publié* la Nouvelle Arithmétique appliquée au commerce et à la marine, mise en vers français (4[e] *édition, Toulouse,* 1843).

En France, le premier recueil de récréations qui a été publié semble être celui de maître Nicolas Chuquet : Inventions de nombres en général, lesquelz par la Règle des premiers, se treuvent. *Cet ouvrage, édité en* 1484, *est écrit en vieux français ; la règle des premiers est l'emploi de l'algèbre, et Nicolas Chuquet peut être considéré, à juste titre, comme le créateur de l'algèbre en France. Ce traité fait suite à son* Triparty en la science des nombres. *Dans les ouvrages classiques d'arithmétique et d'algèbre qui furent publiés dans la suite, on trouve de nombreux exercices extraits du livre de Nicolas Chuquet, et, aujourd'hui encore, ces problèmes sont proposés dans les ouvrages destinés aux élèves de nos écoles. Outre des questions simples d'analyse indéterminée, on trouve dans ce traité des* jeux et esbattements qui par la science des nombres se font. *C'est dans cette partie de l'ouvrage que l'on rencontre certains exercices fort connus que nous n'hésiterons pas* *toutefois à reprendre et à indiquer plus loin : le problème du loup, de la chèvre et du chou, celui des trois maris jaloux, etc.*

Parmi les problèmes proposés par Nicolas Chuquet certains sont certainement empruntés à Léonard de Pise ou Fibonacci (1175-1230), *et celui-ci en a lui-même emprunté aux Arabes; d'autres, comme celui des « troys maryz », ont été énoncés par Albinus Flaccus Alcuin* (735-804), *qui fut précepteur et conseiller de Charlemagne. Clavius qui publia un des premiers traités d'algèbre* (1608) *a repris certains problèmes de Chuquet et en a proposé d'autres.*

Plus tard (1626), *Claude-Gaspard Bachet, sieur de Meziriac, publiait les* Problèmes plaisants et délectables sur les nombres, *comprenant une suite de problèmes connus à cette date et des problèmes nouveaux.* (*L'ouvrage a été réédité par Lisbonne en* 1874.) *D'autres traités suivirent ; citons surtout celui de Ozanam :* Récréations mathématiques et physiques, 1692, 2 *vol.; cet ouvrage, réédité après sa mort par M. de C. G. F. (de Chanla, géomètre forésien), qui n'était autre que de Montucla* (1725-1799), *fut publié en* 4 *vol.* (1778); *une nouvelle édition* (1790) *porte l'initiale du nom de Montucla. Les grands mathématiciens Euler, Newton, etc., et, plus près de nous, Lucas, Laisant, etc., n'ont pas dédaigné d'apporter leur contribution à cet ensemble d'exercices choisis, qui se transmettent de siècle en siècle.*

Nous avons rassemblé dans cet ouvrage un certain nombre de problèmes et récréations déjà connus en choisissant ceux qui nous ont paru susceptibles d'être compris par les lecteurs curieux de mathématiques mais qui ne sont ni des spécialistes, ni des professionnels. Pour ceux qui sont tirés de publications anciennes, nous donnons autant que possible les sources. Nous avons essayé de classer tous les problèmes dans un ordre méthodique et dans chaque partie dans un ordre de difficulté croissante.

Dans la table des matières, nous avons cru, pour la commodité des recherches, et ainsi qu'on le faisait anciennement (*Ozanam,* 1778), *devoir reprendre à la fin du volume tous les énoncés, de façon à retrouver tout de suite un exercice déterminé.*

CURIOSITÉS NUMÉRIQUES ET PROPRIÉTÉS DE CERTAINS NOMBRES

Procédés curieux d'opérations.

La multiplication manuelle. — Ce procédé de multiplication que l'on trouve encore employé aujourd'hui dans certaines tribus arabes, et aussi dans l'Inde, se trouve indiqué dans le *Khélasat al hissab* (*Essence de calcul*) de l'auteur syrien Beha-Eddin (1547-1622). Mais on le rencontre déjà dans le *Triparty en la science des nombres* (1484), par maître Nicolas Chuquet, ainsi d'ailleurs que le procédé que nous employons aujourd'hui.

Il présente l'avantage de ne retenir par cœur que les produits des premiers nombres entiers jusqu'à 5×5 et d'en déduire facilement les produits des autres nombres entiers jusqu'à 9×9.

Soit à trouver le produit 8×9.

Remarquons que $8 = 5 + 3$, $9 = 5 + 4$.

On lève 3 doigts d'une main et 4 de l'autre, les autres doigts étant baissés, soit $5 - 3 = 2$ doigts pour l'une et $5 - 4 = 1$ doigt pour l'autre.

La quantité de doigts levés, soit $3 + 4 = 7$, donne le chiffre des dizaines du produit.

Le produit des nombres correspondant aux doigts baissés, soit $2 \times 1 = 2$, donne le chiffre des unités.

On a bien : $8 \times 9 = 72$.

Justification. On doit effectuer $(5 + 3)(5 + 4)$, on a :

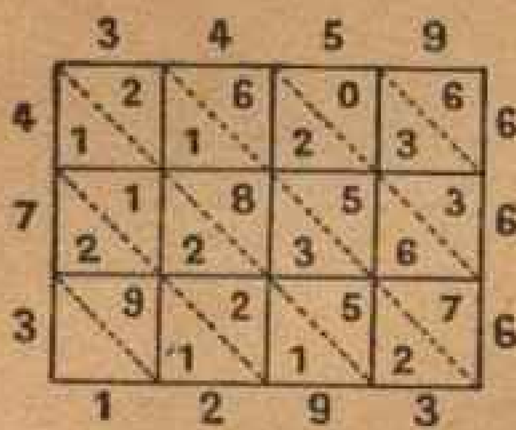
$$\begin{aligned}(5+3)(5+4) &= 5\times5+3\times5+5\times4+3\times4\\ &= 10(3+4)+5\times5+3\times4-5\times3-5\times4\\ &= 10(3+4)+(5-3)(5-4).\end{aligned}$$

La multiplication musulmane (1). — La disposition prise par les musulmans pour leurs multiplications est assez curieuse et semble plus facile à comprendre que la nôtre pour des débutants.

(1) D'après l'ouvrage de Beha-Eddin.

Exemple : 3 459 × 374 = 1 293 666.

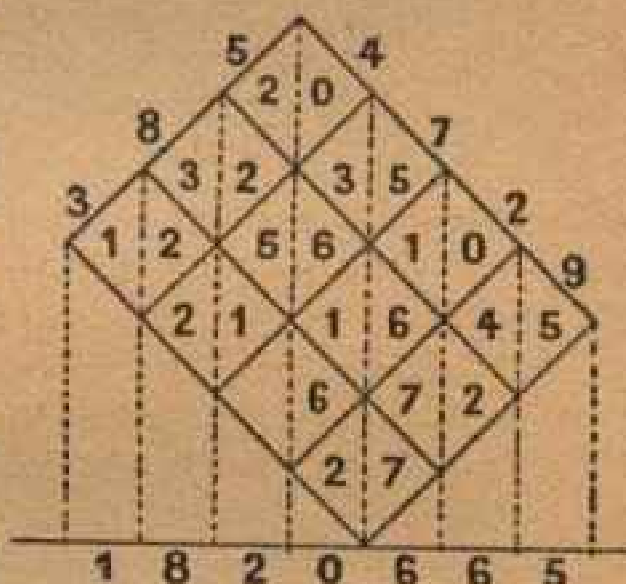
On écrit l'un des facteurs 3 459 de gauche à droite, puis 374 de bas en haut; traçons des carrés ainsi qu'il est indiqué et leurs diagonales en pointillé.



Inscrivons dans chaque case le produit des chiffres du multiplicande et du multiplicateur qui se trouvent sur la ligne et la colonne correspondantes, comme dans la table de multiplication, ce produit étant disposé de façon que le chiffre des dizaines soit séparé du chiffre des unités par la diagonale pointillée. On fait ensuite la somme de tous les produits (addition ordinaire) en prenant comme direction celle des lignes pointillées.

En somme, il n'y a pas besoin d'ordre spécial dans l'opération et de plus on n'a pas à utiliser les retenues dans la multiplication.

Cette disposition a le désavantage de faire l'addition obliquement; mais en disposant un peu différemment le rectangle, on peut obvier à cet inconvénient en opérant comme l'indique la figure.



(exemple : 4 729 × 385 = 1 820 665).

Les multiplications par 9. — Si l'on multiplie les 10 premiers nombres entiers de la suite naturelle par 9, on obtient comme produits :

09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

Les chiffres des dizaines des produits sont, dans leur ordre naturel, les premiers nombres entiers, il en est de même pour les chiffres des unités, mais l'ordre est inverse. Ce résultat s'explique aisément si l'on remarque que $9 = 10 - 1$. (Les propriétés du nombre 9 dans la numération décimale correspondent à celles du nombre n dans la numération à base $n + 1$.)

— Cette propriété se retrouve si l'on prend une suite de nombres entiers consécutifs compris entre 2 dizaines consécutives, par exemple :

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Les produits par 9 sont :

189, 198, 207, 216, 225,..., 252, 261, 270 ;

les chiffres des unités se retrouvent dans leur ordre naturel renversé; les autres chiffres pris en ensemble dans chaque produit sont des nombres entiers consécutifs.

Ces résultats s'expliquent aisément :

$$21 \times 9 = 21\,(10 - 1) = 210 - 21,$$
$$22 \times 9 = 22\,(10 - 1) = 220 - 22,$$
$$23 \times 9 = 23\,(10 - 1) = 230 - 23, \text{ etc.}$$

On comprend aisément pourquoi ces soustractions donnent les résultats indiqués.

Opérations donnant des résultats remarquables.

Multiplications par le nombre 9.

$$\begin{aligned}
1 \times 9 + 2 &= 11,\\
12 \times 9 + 3 &= 111,\\
123 \times 9 + 4 &= 1\,111,\\
1\,234 \times 9 + 5 &= 11\,111,\\
12\,345 \times 9 + 6 &= 111\,111,\\
123\,456 \times 9 + 7 &= 1\,111\,111,\\
1\,234\,567 \times 9 + 8 &= 11\,111\,111,\\
12\,345\,678 \times 9 + 9 &= 111\,111\,111,\\
123\,456\,789 \times 9 + 10 &= 1\,111\,111\,111.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \times 9 + 7 &= 88,\\
98 \times 9 + 6 &= 888,\\
987 \times 9 + 5 &= 8\,888,\\
9\,876 \times 9 + 4 &= 88\,888,\\
98\,765 \times 9 + 3 &= 888\,888,\\
987\,654 \times 9 + 2 &= 8\,888\,888,\\
9\,876\,543 \times 9 + 1 &= 88\,888\,888,\\
98\,765\,432 \times 9 + 0 &= 888\,888\,888.
\end{aligned}$$

Les puissances des nombres composés de chiffres 9.

$$9^2 = 81,$$
$$99^2 = 9\,801,$$
$$999^2 = 998\,001,$$
$$9\,999^2 = 99\,980\,001,$$
$$99\,999^2 = 9\,999\,800\,001.$$

Le nombre 8. — Le tableau ci-dessous nous donne une suite curieuse de relations symétriques :

$$1 \times 8 + 1 = 9,$$
$$12 \times 8 + 2 = 98,$$
$$123 \times 8 + 3 = 987,$$
$$1\,234 \times 8 + 4 = 987\,6,$$
$$12\,345 \times 8 + 5 = 987\,65,$$
$$123\,456 \times 8 + 6 = 987\,654,$$
$$1\,234\,567 \times 8 + 7 = 987\,654\,3,$$
$$12\,345\,678 \times 8 + 8 = 987\,654\,32,$$
$$123\,456\,789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321.$$

Le nombre 11. — Pour multiplier un nombre par 11, on est ramené à ajouter deux produits partiels égaux au multiplicande, le second étant déplacé d'un rang par rapport au premier. Le produit peut s'écrire tout de suite.

Soit à effectuer $387\,052 \times 11$.

Le produit est 4 257 572.

Nous écrivons le chiffre des unités 2, puis nous ajoutons chaque chiffre du nombre à celui qui le précède : 5 et 2 font 7 que nous écrivons au rang des dizaines; puis 0 et 5 font 5, chiffre des centaines; 7 et 0 font 7; 8 et 7 font 15, j'écris 5 et retiens 1; 3 et 8 font 11 et 1 retenu font 12, j'écris 2 et retiens 1; 1 et 3 font 4.

En somme, au lieu de poser l'addition $\left\{\begin{array}{r} 387052 \\ 387052 \end{array}\right.$, on l'effectue directement.

On trouverait également une règle simple pour multiplier un nombre par 111, 1 111, etc., aussi pour multiplier 671 par 111, j'écris successivement (en allant des unités vers les dizaines, centaines, etc.) 1 ; $7 + 1 = 8$; $6 + 7 + 1 = 14$, j'écris 4 et je retiens 1 ; $6 + 7 = 13 + 1 = 14$, j'écris 4 et je retiens 1 ; $6 + 1 = 7$. Le nombre cherché est 74 481.

Remarque. — Rattachons au nombre 11 les produits remarquables suivants :

$$1^2 = 1,$$
$$11^2 = 121,$$
$$111^2 = 12\,321,$$
$$1\,111^2 = 1\,234\,321,$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321,$$
$$111\,111^2 = 12\,345\,654\,321.$$

On voit tout de suite la règle de formation du produit.

Le nombre 37. — Considérons le nombre 37 et la suite des nombres de la progression arithmétique

3. 6. 9. 12. 15... 27.

— En multipliant le nombre 37 par chacun des nombres de la suite, on obtient des produits tels que chacun d'eux est formé de 3 chiffres égaux et, de plus, dans chaque produit la somme des 3 chiffres égale le nombre par lequel on a multiplié 37.

Ainsi, on trouve successivement :

111, 222, 333, 444,..., 999.

Ce résultat s'explique aisément; $37 \times 3 = 111$, et les autres produits se déduisent de celui-ci :

$$37 \times 6 = 37 \times 3 \times 2 = 111 \times 2;$$
$$37 \times 9 = 37 \times 3 \times 3 = 111 \times 3; ...$$

— Si l'on considère la suite de la progression jusqu'à 54 :

30. 33. 36. 39. 42... 54,

et que l'on multiplie de nouveau tous ces nombres par 37, chaque produit obtenu renferme 4 chiffres, les deux chiffres du milieu sont égaux et la somme des deux autres égale le chiffre du milieu; on obtient effectivement :

1 110, 1 221, 1 332, 1 443, ... 1 998.

Ce résultat s'explique ainsi :

$$37 \times 30 = 37 \times 3 \times 10 = 1\,110,$$
$$37 \times 33 = 37 \times 30 + 37 \times 3 = 1\,110 + 111 = 1\,221,$$
$$37 \times 36 = 37 \times 30 + 37 \times 6 = 1\,110 + 222 = 1\,332,$$

. . . .

— Si l'on considère la suite des nombres de la progression, à partir de 60 jusqu'à 108, on retrouvera encore des produits analogues, etc.

— D'ailleurs, 037 est la période de la fraction décimale périodique égale à $\frac{1}{27}$. Or : $\frac{1}{27} = \frac{1}{9 \times 3} = 0{,}037037...$

D'autre part $\frac{1}{9} = 0{,}111.....$

Cela permet de voir que $37 \times 3 = 111$ et la même méthode permet de trouver des relations analogues à celle que nous venons de signaler en ce qui concerne par exemple les nombres : 15 873, 12 345 679. (Voir plus loin.)

Le nombre 15 873. — On a :

$$\frac{1}{63} = \frac{1}{9 \times 7} = 0{,}015873015873...$$

D'où :

$$\begin{aligned} &15\,873 \times 7 = 111\,111 \\ &15\,873 \times 14 = 222\,222, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &15\,873 \times 63 = 999\,999. \end{aligned}$$

Généralisation. — D'une façon générale, pour obtenir de tels nombres l'on prend une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur un multiple impair de 9 non divisible par 5.

Ex. :

$$\frac{1}{9 \times 3} = \frac{1}{27}, \quad \frac{1}{9 \times 7} = \frac{1}{63}, \quad \frac{1}{9 \times 9} = \frac{1}{81},$$

$$\frac{1}{9 \times 11} = \frac{1}{99}, \quad \frac{1}{9 \times 13} = \frac{1}{117}, \quad \frac{1}{9 \times 17} = \frac{1}{153}.$$

Les nombres entiers, formés en prenant une ou plusieurs périodes des nombres décimaux périodiques simples obtenus en effectuant la division, jouissent de la propriété suivante : multipliés par le facteur qui multiplie 9 dans le dénominateur de la fraction considérée, ces nombres donnent des produits qui ne sont composés qu'avec le chiffre 1.

$$\frac{1}{9 \times 3} = \frac{1}{27}, \quad \frac{100}{27} = 0{,}037.$$

1°

$$\begin{aligned} &37 \times 3 = 111, \\ &37 \times 6 = 111 \times 2 = 222, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &37 \times 27 = 999 = 111 \times 9 = 999; \end{aligned}$$

2°
$$\frac{1}{9 \times 7} = \frac{1}{63} = 0{,}015873\ 015873\ldots$$

La période est 015873.

$$15\,873 \times 7 = 111\,111,$$
$$15\,873 \times 14 = 222\,222,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$15\,873 \times 63 = 999\,999;$$

3°
$$\frac{1}{9 \times 9} = \frac{1}{81} = 0{,}012345679\ 012345679\ldots$$

La période est 012345679.

$$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$12\,345\,679 \times 72 = 888\,888\,888.$$

Le chiffre 8, absent du multiplicateur et du multiplicande, n'apparaît qu'au produit ;

4°
$$\frac{1}{9 \times 11} = \frac{1}{99} = 0,\ 0101\ 0101\ldots$$

La période est 0101.

$$101 \times 11 = 1\,111;$$

5°
$$\frac{1}{9 \times 13} = \frac{1}{117} = 0{,}008547\ \ 008547\ldots$$

La période est 008547.

$$8\,547 \times 13 = 111\,111;$$

6°
$$\frac{1}{9 \times 17} = \frac{1}{153} = 0{,}0065359777124183\ldots$$

La période est 0065359777124183.

$$65\,359\,777\,124\,183 \times 17 = 1\,111\,111\,111\,111\,111.$$

Remarque. — Pour retrouver la fraction génératrice du nombre décimal périodique simple, il suffit de prendre pour numérateur la période entière et pour dénominateur un nombre de 9 égal à celui des chiffres de la période :

$$\frac{1}{81} = \frac{0\ 12\ 345\ 679}{9\ 99\ 999\ 999},$$

donc :
$$12\,345\,679 \times 81 = 999\,999\,999.$$

Quelques propriétés du nombre 142 857. — 1° *Le produit de* 142 857 *par* 7 *est un nombre composé de chiffres* 9 :

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

Cela provient de ce que 142 857 est la période de la fraction décimale périodique simple correspondant à $\frac{1}{7}$:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857...$$

Or, cette dernière fraction décimale périodique est égale à

$$\frac{142\,857}{999\,999}.$$

Donc :

$$\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7},$$

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

2° *Si l'on multiplie le nombre* 142 857 *par un des nombres* 2, 3, 4, 5, 6, *les produits obtenus sont des nombres cycliques, c'est-à-dire formés des mêmes chiffres, et s'obtiennent de l'un d'eux par permutation circulaire.*

Ex. :

$$142\,857 \times 2 = 285\,714,$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571,$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428,$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285,$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142.$$

Ce résultat curieux s'explique, en partant de la fraction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857...$$

$$\frac{2}{7} = \frac{100}{7} - \frac{98}{7} = 14{,}2857\ 142857... - 14 = 0{,}2857\ 142857\ 14...$$

Donc : $0{,}142857\ 142857... \times 2 = 0{,}2857\ 14\ 2857\ 14...$

et

$$142857 \times 2 = 2857\ 14.$$

On opérerait de même pour les autres produits :

$$\frac{3}{7} = \frac{10}{7} - 1; \quad \frac{4}{7} = \frac{10\,000}{7} - \frac{9\,996}{7} = \frac{10\,000}{7} - 1428;$$

$$\frac{5}{7} = \frac{100\,000}{7} - 14285; \quad \frac{6}{7} = \frac{1\,000}{7} - 142.$$

3° *Si l'on multiplie le nombre* 142 857 *par un nombre quelconque* *mais multiple de 7, et que l'on partage le produit obtenu en tranches de 6 chiffres, à partir de la droite, la somme des nombres constitués par ces tranches est* 999 999.

Ex. : $142\,857 \times 84 = 11\,999\,988,$

$$\begin{array}{r} 999\,988 \\ 11 \\ \hline 999\,999. \end{array}$$

— Ce résultat s'explique facilement :

Si un nombre est composé de n *chiffres* 9 *et qu'on le multiplie par un nombre quelconque ; en partageant le produit en tranches de* n *chiffres à partir de la droite et en ajoutant les tranches obtenues, on retrouve le nombre primitif composé de chiffres* 9.

$$999\,999 \times 3\,507\,028 = 3\,507\,024\,492\,972$$

et

$$\begin{array}{r} 492\,972 \\ 507\,024 \\ 3 \\ \hline 999\,999. \end{array}$$

Dans ces conditions :

$$142\,857 \times 84 = 142\,857 \times 7 \times 12 = 999\,999 \times 12,$$

et ce dernier produit conduit au résultat énoncé.

4° *Si l'on multiplie le nombre* 142 857 *par un nombre quelconque supérieur à* 7, *et que l'on partage le produit obtenu en tranches de* 6 *chiffres à partir de la droite ; en additionnant toutes les tranches obtenues, on retrouve le nombre* 142 857 *ou une de ses permutations circulaires, ou un nombre comprenant plus de* 6 *chiffres. Dans ce dernier cas, en traitant cette somme comme on a traité le produit précédent, on obtient comme nouvelle somme* 142 857 *ou une de ses permutations circulaires.*

Ex. : $142\,857 \times 63\,450\,732 = 9\,064\,381\,221\,324;$

or,

$$\begin{array}{r} 221\,324 \\ 064\,381 \\ 9 \\ \hline 285\,714. \end{array}$$

— Prenons maintenant un nombre quelconque formé de chiffres 9, par exemple 999, puis un de ses multiples $999 \times 8 = 7\,992$. Ajoutons au produit un nombre quelconque 43 et partageons le nombre en tranches de 3 chiffres :

$$\begin{array}{r} 7\,992 \\ 43 \\ \hline 8\,035 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 035 \\ 8 \\ \hline 43 \end{array}$$

nous retrouvons le nombre 43.

— Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} 142\,857 \times 63\,450\,732 &= 142\,857 \times 7 \times 9\,064\,390 + 142\,857 \times 2 \\ &= 999\,999 \times 9\,064\,390 + 142\,857 \times 2. \end{aligned}$$

Or, $142\,857 \times 2$ donne un nombre obtenu de 142 857 par permutation des chiffres, et par suite la propriété énoncée se trouve établie.

5° Si on considère le nombre

$$1 \quad 4 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 7$$

et les nombres obtenus en procédant à une permutation circulaire, on peut réaliser le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 = 27 \\ 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 = 27 \\ 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 = 27 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 = 27 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 = 27 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 = 27 \\ \hline 27 & 27 & 27 & 27 & 27 & 27 \end{array}$$

la somme des chiffres de chaque tranche horizontale et la somme des chiffres de chaque tranche verticale est 27.

La somme des nombres du tableau ci-dessus est :

$$27 \times 111\,111 = 2\,999\,997.$$

Le nombre 12 345 679.

$$\begin{aligned} 12\,345\,679 \times 9 &= 111\,111\,111, \\ 12\,345\,679 \times 18 &= 222\,222\,222, \\ 12\,345\,679 \times 27 &= 333\,333\,333, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 12\,345\,679 \times 81 &= 999\,999\,999. \end{aligned}$$

— 012 345 679 est la période de la fraction décimale périodique simple que l'on obtient en convertissant la fraction $\frac{1}{81}$.

On a donc : $$\frac{1}{81} = \frac{12\,345\,679}{999\,999\,999}.$$

Cette relation donne l'explication des égalités précédentes.

Le nombre 123 456 789. — Ce nombre 123 456 789 est composé par tous les chiffres autres que 0.

— La somme de ses chiffres est 45.

Tous les nombres cycliques (c'est-à-dire formés par tous les chiffres) correspondants ont aussi 45 pour somme de leurs chiffres ; en particulier le nombre renversé 987 654 321 ; la différence de ces deux nombres : 864 197 532 est encore un des cycliques de 123 456 789, la somme de ses chiffres est 45.

— Le nombre 123 456 789 multiplié par chacun des chiffres significatifs qui n'est pas multiple de 3 donne comme produits des nombres cycliques :

$$123\,456\,789 \times 1 = 123\,456\,789,$$
$$123\,456\,789 \times 2 = 246\,913\,578,$$
$$123\,456\,789 \times 4 = 493\,827\,156,$$
$$123\,456\,789 \times 5 = 617\,283\,945,$$
$$123\,456\,789 \times 7 = 864\,197\,523,$$
$$123\,456\,789 \times 8 = 987\,654\,312.$$

Nombres renversés.

Les nombres de 3 chiffres et le nombre 1 089. — Prenez un nombre de 3 chiffres, le premier et le dernier étant différents. Renversez l'ordre des chiffres, puis prenez la différence entre les deux nombres.

Considérez maintenant cette différence et ajoutez-la au nombre obtenu en renversant l'ordre de ses chiffres, la somme sera toujours égale à 1 089.

Exemple : Soit le nombre 421 ; le nombre renversé est 124 :

$421 - 124 = 297$ le nombre renversé est 792

et $297 + 792 = 1\,089$.

Ce résultat s'explique facilement.

Soit c le chiffre des centaines du nombre choisi, d le chiffre des dizaines, u le chiffre des unités.

Le nombre choisi est $100c + 10\,d + u$.

Le nombre renversé est $100\,u + 10\,d + c$.

Supposons par exemple que l'on ait $c > u$. Retranchons alors les deux égalités membre à membre, la seconde de la première, on a :

$100\,(c - u) + u - c$ ou $100\,(c - u - 1) + 10 \times 9 + 10 + u - c$

Le nombre renversé est $100\,(10 + u - c) + 10 \times 9 + c - u - 1$ et, en ajoutant les deux nombres membre à membre, on a :

$$100\,(10 - 1) + 10 \times 9 \times 2 + 10 - 1 \text{ soit } 1\,089.$$

Les nombres de trois chiffres renversés. — *La différence entre un nombre formé de 3 chiffres et ce nombre renversé est un multiple de* 99.

Soit c le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines, u le chiffre des unités.

Le nombre peut s'écrire $100\,c + 10\,d + u$.

Le nombre renversé s'écrit $100\,u + 10\,d + c$.

Supposons $c > u$, le premier nombre est supérieur au second et on a pour la différence : $99\,c - 99\,u = (c - u)\,99$.

Cette différence est bien divisible par 99.

Si l'on avait $c < u$, on opérerait d'une façon analogue.

Cas particulier. — *La différence entre un nombre formé de 3 chiffres qui, pris dans l'ordre écrit, sont consécutifs et le nombre renversé est toujours* 198.

Cela résulte de la proposition qui précède car la différence est comprise entre 100 et 200 et elle doit être multiple de 99.

On peut d'ailleurs établir cette proposition directement. Si n, $n + 1$, $n + 2$ sont les chiffres consécutifs, le nombre s'écrira $100\,n + 10\,(n + 1) + n + 2$ et le nombre renversé $100\,(n + 2) + 10\,(n + 1) + n$.

La différence est $200 - 2 = 198$.

Les nombres de quatre chiffres et le nombre 3 087. — *Si l'on considère un nombre comprenant 4 chiffres pris dans l'ordre naturel des chiffres et le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres, la différence des deux nombres est toujours* 3087.

Ainsi avec le nombre 5678 et le nombre renversé 8765, on a :

$$8\,765 - 5\,678 = 3\,087.$$

Cela s'explique aisément :

m étant le chiffre des mille dans le nombre considéré, $m + 1$ sera, par exemple, celui des centaines, $m + 2$ celui des dizaines et $m + 3$ celui des unités.

Le nombre considéré est

$$1\,000\,m + 100\,(m + 1) + 10\,(m + 2) + m + 3.$$

Le nombre renversé est

$$1\,000\,(m + 3) + 100\,(m + 2) + 10\,(m + 1) + m.$$

En retranchant membre à membre le premier du second, on a, après simplifications :

$$3\,000 + 100 - 10 - 3 \text{ soit } 3\,087.$$

La remarque que nous avons faite plus haut est générale : *Si l'on considère un nombre quelconque composé de n chiffres consécutifs, c'est-à-dire pris dans l'ordre naturel des chiffres, et le nombre que l'on obtient en renversant l'ordre des chiffres, leur différence est constante quels que soient les n chiffres considérés.*

Pour un nombre de 5 chiffres, par exemple, on trouvera 41 976.

Nombres les plus grands possible écrits avec un même chiffre. — *Former le plus grand nombre possible à l'aide de 3 chiffres égaux à 3.*

C'est 3^{33}. On pourrait penser au nombre 3^{3^3} mais celui-ci ($3^3 = 27$) ne donne que 3^{27}.

Quel est le nombre le plus grand que l'on puisse écrire avec trois 9 ? (C. A. Laisant [1]).

Ici ce n'est pas 9^{99}. C'est certainement le nombre 9^{9^9} car 9^9 est plus grand que 99.

La première puissance 9^9 donne comme résultat 387 420 489.

Pour élever ce dernier nombre à la puissance 9 il faudra faire 387 420 488 multiplications.

Le nombre obtenu a 369 692 128 chiffres.

Pour écrire un tel chiffre sur une seule bande de papier, en supposant que chaque chiffre occupe une longueur de 1 millimètre, il faudrait que la bande de papier ait une longueur de plus de 1 478 kilomètres.

— Il est d'ailleurs curieux de voir avec quelle rapidité les nombres ainsi formés à partir de 1 croissent rapidement :

$$1^{1^1} = 1,\ 2^{2^2} = 16,\ 3^{3^3} = 19\,683,\ 4^{4^4} = 4\,294\,967\,296.$$

Quel est le nombre le plus grand que l'on puisse écrire en employant 3 fois le chiffre 1 et 3 fois le chiffre 0 ?

On pourrait être tenté de dire que le nombre cherché est 111 000. On serait loin de compte.

Le nombre cherché est $10^{10^{10}}$.

Ce nombre est considérable car

$$10^{10} = 10\,000\,000\,000 \text{ soit } 10 \text{ milliards,}$$

---

(1) Initiation mathématique (1906).

et le nombre 10 porté à cette puissance est représenté par l'unité suivie de 10 milliards de zéros.

A raison de 75 chiffres par minute, il faudrait travailler sans relâche, fêtes et dimanches, pendant plus de 200 ans sur une bande de papier capable de faire le tour de la terre.

Somme de carrés qui est elle-même un carré. — *Etant donné un carré impair, trouver un second carré qui, ajouté au premier, donne, comme somme, un troisième carré.*

Appuyons-nous sur ce que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

Prenons un carré impair, par exemple 49 ou 7^2. 49 est le 25e nombre impair.

La somme des 24 premiers nombres impairs est 24^2. Si l'on ajoute le 25e qui est 7^2, on obtient la somme des 25 premiers nombres impairs soit 25^2. On a donc : $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Le nombre cherché est 24^2.

Remarque. — On peut se proposer, d'une façon générale, de *trouver deux carrés dont la somme soit elle-même un carré.*

Différence de carrés qui est elle-même un carré. — *Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la différence des carrés soit elle-même un carré.*

Soient n et $n + 1$ deux nombres entiers consécutifs, on a :

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

On pourra prendre, pour valeur de $2n + 1$, tout nombre impair carré parfait.

Posons par exemple $2n + 1 = 9$, on en déduit $n = 4$ et on a :

$$5^2 - 4^2 = 3^2.$$

Si $2n + 1 = 49$, $n = 24$ et l'on a :

$$25^2 - 24^2 = 7^2.$$

Deviner ou reconstituer un nombre.

Le billet de banque. — L'identité des billets de la banque de France est assurée par une double notation inscrite sur chacun d'eux. Il existe d'abord, au milieu du recto du billet, un nombre en petits caractères représentant son *numéro* d'ordre dans l'ensemble des billets de même type; une seconde notation en gros caractères se trouve dans les angles, composée de deux nombres, l'un n précédé d'une lettre majuscule, l'autre n' seul est formé de 3 chiffres.

Le numéro du billet peut se déduire de la notation en gros caractères et inversement, ce qui assure son identité en cas de détérioration.

Les deux questions suivantes se trouvent ainsi naturellement posées :

1° Comment le numéro du billet se déduit-il des deux autres nombres?

2° Comment reconstituer ces deux derniers nombres avec le numéro du billet?

Première question

Le numéro du billet est formé de deux parties que l'on obtient en séparant les 3 chiffres de droite ; ceux-ci ne sont que la reproduction du nombre n'. La partie gauche, appelons-la N, provient du nombre n et de la grande lettre qui le précède.

Les lettres sont d'abord rangées et numérotées de 1 à 25, dans l'ordre alphabétique, en remarquant que la lettre I est supprimée (pour éviter toute confusion avec le chiffre 1) et que la lettre W est mise à la fin, ce qui donne le tableau suivant :

Lettres :	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	
Rang :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Lettres :	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z	W
Rang :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour trouver N, il suffira de retrancher 1 du nombre n, de multiplier par 25 ou plus rapidement par $\frac{100}{4}$ et d'ajouter le rang de la lettre moins 1, ce qui se traduit par la formule suivante :

$$N = (n - 1)\,25 + (l - 1)$$

l désignant le rang de la lettre majuscule.

Supposons que l'on ait le nombre P. 2243, on trouverait

$$N = 2\,242 \times 25 + 14 = 56\,064.$$

Deuxième question

La reconstitution du nombre n et de la lettre qui le précède, à l'aide du nombre N, se fera par une opération inverse. On rendra N multiple de 25 en lui retranchant un nombre d'unités variant de 0 à 24, puis on divisera par 25 ou plus rapidement par $\frac{100}{4}$; le nombre retranché augmenté de 1 donnera le rang de la lettre et la fera connaître, le quotient de la division augmenté de 1 sera le nombre n, comme le montre la formule suivante déduite de la première :

$$n = \frac{N - (l - 1)}{25} + 1.$$

Supposons que N soit le nombre 56 064; en retranchant 14 on le rend divisible par 25 et l'on a pour quotient 2 242. On retrouve donc bien 15 pour le rang de la lettre qui est P et 2 243 pour le nombre n.

Remarque importante. — Quand le nombre n' est 000, il n'y a plus lieu de retrancher 1 du rang de la lettre pour trouver N; inversement quand le nombre N est suivi de 3 zéros, on le rend multiple de 25, en lui retranchant un nombre d'unités variant de 1 à 25, puis on continue comme plus haut; mais il n'y a plus lieu d'ajouter 1 au nombre retranché, pour obtenir le rang de la lettre qui précède n.

Les formules précédentes deviennent dans ce cas particulier :

$$N = (n - 1)\,25 + 1 \quad \text{et} \quad n = \frac{N - 1}{25} + 1$$

Conclusion. — Après avoir vérifié sur un plus ou moins grand nombre de billets variés l'exactitude des formules données, on en peut conclure la manière dont les billets d'un même type sont distribués par les nombres n, n' et la série des 25 lettres majuscules :

A chaque valeur de n correspond un ensemble de 25 000 billets; ceux-ci sont distribués en 25 séries de 1 000 billets par les 25 grandes lettres prises dans l'ordre du tableau; enfin dans chacune de ces séries les billets sont classés de 1 à 1 000 par le nombre n' (001 à 000).

Pour terminer nous mentionnerons une autre notation qui accompagne habituellement la date d'émission des billets : elle consiste en une ou deux lettres placées à droite et à gauche de cette date, à droite seulement pour les billets de 1 000 francs.

Les lettres employées pour cette notation sont au nombre de 24 et diffèrent de la série donnée plus haut par l'absence du W. Chaque lettre, simple ou double, correspond à une seule valeur de n et représente par suite un ensemble de 25 000 billets.

Le nombre des lettres utilisées dépend de la valeur du billet et de l'importance de l'émission. Si les premières lettres de la série simple sont en général suffisantes pour les billets de 1 000 francs, par contre pour les coupures, après l'emploi de la série de 24 lettres, on fait usage des séries à doubles lettres, AA, AB, AC, AD,... BA, BB, BC,... CA, CB, etc.

L'emploi d'une série entière correspond ainsi à l'émission de 25 000 × 24, soit 600 000 billets.

(NATURE.)

Reconstituer un nombre de 6 chiffres. — *On a un nombre de 6 chiffres. Le chiffre de gauche est 2; si on le transporte à la droite du nombre, le nouveau nombre surpasse le premier de* 333 308. *Quel est le nombre primitif?*

En ajoutant 333 308 au nombre cherché, on obtient le nombre transformé.

nombre cherché	*237034*
	333308
nombre transformé	*570342*

Le chiffre de droite du nombre cherché est évidemment 4. Dans la somme, les deux derniers chiffres sont 42. Le second chiffre à partir de la droite, dans le nombre cherché, est évidemment 3, et ainsi de suite; on trouve ainsi pour le nombre cherché 237 034.

Reconstituer un nombre. — *Un nombre a pour chiffre des unités, 2. Si l'on transporte ce chiffre de droite à gauche, on obtient un nombre qui est double du premier. Quel est le nombre primitif?*

Nombre cherché 2
double du nombre cherché. 4

4 est évidemment le second chiffre, à partir de la gauche, du nombre cherché, 8 le troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on trouve dans le nombre double un chiffre 2.

On trouve ainsi pour le nombre cherché :

105 263 157 894 736 842.

D'ailleurs ce nombre est la partie périodique de la fraction $\frac{2}{19}$ et peut être répété autant de fois que l'on veut. Tous les nombres obtenus constituent des solutions.

Un curieux nombre de quatre chiffres. — *Trouver un nombre de 4 chiffres tel qu'en le multipliant par 4 on trouve ce même renversé.*

Soit $a\ b\ c\ d$ le nombre primitif :

1° Puisque le premier nombre multiplié par 4 donne un produit de 4 chiffres, qui sera plus grand que 4 000, son premier chiffre a est égal à 1 ou 2;

2° De plus $d \times 4$ donnera toujours un nombre pair d'où un seul chiffre possible aux unités du premier nombre; a est donc pair. Donc : $a = 2$ et $d = 8$.

Le premier nombre est donc : $2\ b\ c\ 8$

$$(1\,000\ a + 100\ b + 10\ c + d)\ 4 = 1\,000\ d + 100\ c + 10\ b + a$$

$$3\,999\ a + 390\ b = 996\ d + 60c$$

$$1\,333\ a + 130\ b = 332\ d + 20\ c$$

Comme $a = 2$ et $d = 8$ on trouve après simplification :

$$1 + 13\ b = 2\ c$$

Comme $2c < 20$

$1 + 13b$ est donc < 20,

le seul nombre possible pour b est :

$$b = 1$$

donc : $2c = 14$

$$c = 7.$$

le nombre cherché est 2 178 :

$$2\,178 \times 4 = 8\,712.$$

Deviner un nombre pensé.

Ce genre de problèmes, dont l'origine est fort ancienne, se traite presque toujours de la même façon.

On fait effectuer, en partant du nombre, une suite d'opérations déterminées à l'avance ; ces opérations sont telles que l'on puisse arriver, à la dernière et connaissant le résultat obtenu, à en déduire, d'une façon simple, le nombre cherché. Bien entendu, les opérations que l'on fait effectuer sur le nombre cherché doivent paraître assez compliquées, afin que l'on ne puisse s'apercevoir du subterfuge employé.

Dans certaines récréations, la suite des opérations effectuées à partir du nombre se détruisent et ramènent au nombre.

Exemple I. *Faites penser un nombre.*

Faites-le multiplier par 3.

Faites retrancher 1 *du produit obtenu et multiplier de nouveau le reste obtenu par* 3.

Faites ajouter le nombre pensé au dernier produit obtenu. Demandez le résultat, ajoutez-lui 3 *mentalement; le résultat est un nombre exact de dizaines, supprimez le zéro (chiffre des unités) et vous avez le nombre pensé.*

Explication. Soit a le nombre pensé, les opérations que vous faites faire donnent successivement :

$$3a;\ 3a-1;\ (3a-1)3 = 9a-3;$$
$$9a-3+a = 10a-3 \quad | \quad 10a-3+3 = 10a$$

Le résultat que vous obtenez est donc formé par le nombre cherché qui a été multiplié par 10.

Exemple II. 1° *Faites tripler le nombre pensé;*

2° *Faites prendre la moitié du résultat obtenu, exactement si c'est possible, sinon on fera ajouter* 1 *au quotient;*

3° *Faites tripler le nouveau résultat obtenu et qu'on vous annonce le résultat définitif;*

4° *Vous divisez alors par* 9 *ce nombre définitif. Le nombre pensé sera le double du quotient, sauf s'il a fallu ajouter* 1 *dans la seconde opération; dans ce dernier cas, vous ajouterez également* 1.

(Nicolas Chuquet.)

Explication. Si quelqu'un a pensé le nombre 41, les opérations successives donnent :

$$123,\ 61+1 = 62,\ 186.$$

Le nombre 9 se trouve compris 20 fois dans 186, le nombre cherché est $20 \times 2 + 1$.

— Avec le nombre 28, on a successivement :

$$84,\ 42,\ 126.$$

Le nombre cherché est 14×2.

— L'explication est simple :

1° Le nombre pensé est pair; il est alors de la forme $2a$. Les opérations proposées donnent : $6a$, $3a$, $9a$, le quotient par 9 donne a et en doublant, on a $2a$ nombre cherché;

2° Le nombre pensé est impair; il est alors de la forme $2a+1$.

Les opérations proposées donnent : $6a+3$, $3a+1$ puis $3a+2$, $9a+6$ le quotient par 9 est a et le nombre est bien $2a+1$.

EXEMPLE III. 1° *Faites multiplier le nombre pensé par lui-même ;*

2° *Faites augmenter le nombre pensé d'une unité et multiplier le nombre obtenu par lui-même ;*

3° *Faites effectuer la différence des deux carrés ;*

4° *Connaissant cette différence qui est toujours un nombre impair, en la diminuant de 1, on a le double du nombre cherché.*

(OZANAM.)

Explication. — Si quelqu'un a pensé un nombre n, les opérations successives donnent n^2, $(n+1)^2$ et $(n+1)^2 - n^2$; or cette différence est $n^2 + 2n + 1 - n^2$ soit $2n+1$.

En la diminuant d'une unité on a le double du nombre cherché.

REMARQUE. — On peut aussi :

1° Faire effectuer le carré du nombre pensé;

2° Faire effectuer le carré du nombre obtenu en retranchant 1 du nombre pensé;

3° Faire effectuer la différence des deux résultats;

4° Connaissant cette différence, on lui ajoutera 1, la moitié du résultat sera le nombre cherché.

— En effet, n étant le nombre cherché, les opérations successives donnent : $n^2 - (n-1)^2$ et $n^2 - (n-1)^2$ ou $2n-1$.

En ajoutant 1 on obtient $2n$.

EXEMPLE IV. 1° *Faites retrancher 1 du nombre pensé puis doubler le reste ;*

2° *Faites retrancher 1 du produit obtenu ;*

3° *Au résultat ajouter le nombre pensé ;*

4° *Connaissant cette somme, ajoutez-y 3 et le tiers du résultat sera le nombre pensé.* (OZANAM.)

— Si quelqu'un pense le nombre n, les opérations successives donnent :

$(n-1)2$, $(n-1)2-1 = 2n-3$, $2n-3+n = 3n-3$.

Si l'on ajoute 3 à cette somme, le tiers du résultat donne bien n.

REMARQUE. — La méthode est générale :

1° Faites retrancher 1 du nombre cherché et multiplier le résultat par un nombre quelconque a ;

2° Faites retrancher 1 du produit obtenu;

3° Au résultat faites ajouter le nombre pensé;

4° Connaissant cette somme, ajoutez mentalement $a + 1$; en divisant le résultat par $a + 1$, vous avez le nombre cherché.

Explication. — Si n est le nombre cherché, on obtient successivement : $n - 1$, $na - a$, $na - a - 1$, $na - 1$, $na + a$ ou $(a + 1)\,n$.

EXEMPLE V. *Laissez celui qui aura pensé le nombre libre de le multiplier, de le diviser par tels nombres qu'il voudra pourvu qu'il indique, à chaque opération, le multiplicateur ou le diviseur qu'il a choisi.*

Prenez à part, mentalement, un nombre quelconque sur lequel vous répéterez secrètement les multiplications et divisions successivement indiquées. Quand vous vous arrêterez faites diviser le dernier résultat obtenu par le nombre pensé et secrètement faites la division correspondante, le quotient que l'on obtiendra sera le même que celui obtenu par la personne qui opère sur le nombre pensé. Faites ajouter à ce quotient le nombre pensé et demandez la somme obtenue, il suffira de retrancher de cette somme le quotient que l'on connaît et on obtiendra évidemment le nombre cherché.

(BACHET DE MEZIRIAC.)

Si A est le nombre pensé et que la suite des opérations conduise à : $\frac{A \times 3 \times 5 \times 8}{4 \times 2}$, si a est le nombre que l'on a pris secrètement, les opérations conduisent à : $\frac{a \times 3 \times 5 \times 8}{4 \times 2}$.

Le quotient des résultats le premier par A, le second par a donne le même nombre : $\frac{3 \times 5 \times 8}{4 \times 2}$, que l'on connaît.

Si l'on se fait donner la somme $A + \frac{3 \times 5 \times 8}{4 \times 2}$, on pourra donc, par une simple soustraction, calculer A.

(Le plus simple est évidemment de prendre $a = 1$ et d'effectuer directement $\frac{3\times5\times8}{4 \times 2}$)

Deviner en même temps deux nombres pensés inférieurs à 9. — *Faites doubler le premier nombre, puis ajouter* 1; *faites multiplier la somme par* 5 *et, au produit, faites ajouter le second nombre. Demandez le résultat; de ce résultat retranchez* 5, *le* *nombre obtenu sera composé de 2 chiffres, le chiffre des dizaines sera le premier nombre pensé, le chiffre des unités sera l'autre.*

EXEMPLE. — Les nombres pensés étant 3 et 8, les opérations successives donnent : $3 \times 2 + 1 = 7$; $7 \times 5 = 35$; $35 + 8 = 43$.

Ce nombre que l'on vous donne diminué de 5 donne 38.

Cette méthode s'explique facilement :

Soient a et b les deux nombres. On fait former successivement: $2a + 1$, puis $(2a + 1)5 = 10a + 5$, puis $10a + 5 + b$, nombre qui vous est donné.

En retranchant 5 il reste $10a + b$, ce nombre a bien a pour chiffre des dizaines, b pour chiffre des unités.

Cette méthode se généralise ainsi :

Deviner en même temps trois nombres pensés inférieurs à 9. — On peut prendre la même méthode :

Faites doubler le premier nombre, puis ajouter 1; faites multiplier la somme par 5 et, au produit, ajouter le second nombre puis, de la même façon, faites doubler la somme obtenue et ajouter 1; faites multiplier le résultat par 5 et, au produit, ajouter le troisième nombre. Demandez le résultat; de ce résultat retrancher 55, le nombre obtenu aura 3 chiffres; le chiffre des centaines sera le premier nombre, celui des dizaines le second, celui des unités le troisième. (OZANAM.)

EXEMPLE. Les nombres pensés étant 5, 8, et 2, les opérations successives donnent :

$$5 \times 2 + 1 = 11;\ 11 \times 5 + 8 = 63;\ 63 \times 2 + 1 = 127;$$
$$127 \times 5 + 2 = 637;\ 637 - 55 = 582.$$

Nous retrouvons bien les nombres 5, 8 et 2.

Explication. Elle est analogue à la précédente :

Soient a, b, c les nombres pensés. Les opérations successives donnent :

$$2a + 1;\ 10a + 5 + b;\ 20a + 2b + 11;$$
$$100a + 10b + 55 + c.$$

Si l'on retranche 55, il reste le nombre $100a + 10b + c$.

Le chiffre des centaines est a, celui des dizaines b, celui des unités c.

De la même façon, on peut deviner 4 nombres pensés inférieurs à 9, 5 nombres, etc. On ne se rappellera que le résultat définitif; pour deux nombres, on retranchera 5; pour trois, 55; pour quatre, 555; etc.

Cette récréation peut se faire avec des cartes :

Vous disposez sur la table les 9 premières cartes d'une des couleurs d'un jeu de 52 cartes.

Vous demandez à 5 personnes, par exemple, de penser chacune une carte.

La première inscrit sur un papier la valeur des points de la carte qu'elle a choisie, double ce nombre, ajoute 1 et multiplie le tout par 5.

Elle passe le papier à la seconde personne qui ajoute au total le nombre des points de la carte qu'elle a choisie, double — ajoute 1 au total et multiplie le résultat par 5.

Elle passe le papier à la troisième et ainsi de suite...

On termine en retranchant 5 555.

Le résultat définitif sera un nombre de 5 chiffres et ces chiffres successifs correspondront aux nombres des points des cartes choisies.

En réalité, on fait multiplier les nombres des puissances de 10; pour dissimuler le procédé on fait ajouter 1 à chaque opération et on retranche du résultat total le nombre qui en résulte.

Deviner deux ou plusieurs nombres pensés inférieurs à 10. — *Faire multiplier le premier nombre pensé par 2, puis ajouter 5 au produit et multiplier le tout par 5. Au total obtenu ajouter 10 et aussi le deuxième nombre pensé. Demander le résultat obtenu; on retranche 35 de ce résultat. Le nombre définitif qui est plus petit que 100 a pour chiffres les deux nombres pensés.*

(Nicolas CHUQUET.)

On explique facilement le résultat.

Les opérations successivement faites sur le nombre a à deviner conduisent à :

$$(2a + 5)\,5 + 10 + b \quad \text{ou} \quad 10a + b + 35.$$

Si on retranche 35, il reste $10a + b$.

Ce nombre a pour chiffre des dizaines a et pour chiffre des unités b.

Nicolas Chuquet indique la solution pour autant de nombres que l'on veut, ces nombres étant inférieurs à 10.

Il suffit de continuer de la même façon; s'il y a trois nombres, le résultat obtenu précédemment sera multiplié par 10, et on fera ajouter le troisième nombre; du résultat on fera retrancher 350. On demandera le résultat obtenu, les trois chiffres qui composeront celui-ci seront les 3 nombres pensés.

Ainsi, le troisième nombre étant c, on aura :

$$(10a + b + 35)10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

La solution est générale.

Deviner plusieurs nombres pensés dont l'un est quelconque et les autres des nombres d'un seul chiffre. — L'avant-dernière méthode est toujours applicable.

Supposons que l'on ait pensé les nombres 341, 8, 9 et 1. Les opérations indiquées donnent successivement :

$$341 \times 2 + 1;$$
$$341 \times 10 + 5 + 8;$$
$$341 \times 20 + 8 \times 2 + 11;$$
$$341 \times 100 + 8 \times 10 + 55 + 9;$$
$$341 \times 200 + 8 \times 20 + 9 \times 2 + 111;$$
$$341 \times 1\,000 + 8 \times 100 + 9 \times 10 + 555 + 1$$

soit $341\,891 + 555.$

En retranchant 555, il reste 341 891.

Les nombres cherchés sont pour ceux d'un chiffre les trois derniers à droite et pour le quatrième le nombre qui reste.

Le jeu de l'anneau. — *Plusieurs personnes en nombre inférieur à 10 se trouvent réunies; on propose un anneau qu'une de ces personnes met à une des jointures de l'un de ses doigts. Il faut deviner quelle personne a cet anneau, à quelle main, à quel doigt, à quelle jointure.*

Le problème, comme on va le voir, revient à deviner plusieurs nombres pensés : on peut opérer dans une compagnie où le nombre des personnes doit être inférieur à 10.

On commence par numéroter chaque personne, la première représentant 1, la deuxième 2, la troisième 3, etc. Chaque personne devra se rappeler son numéro. On conviendra ensuite, par devant la société, que la main droite vaut 1, la main gauche 2; le premier doigt de la main vaudra 1, le deuxième 2, etc.; enfin la première jointure comptera pour 1, la deuxième pour 2, la troisième pour 3.

Cela posé, on priera l'une des personnes de prendre l'anneau et de le mettre à un de ses doigts, à la jointure qu'elle voudra. Bien entendu, il conviendra, à ce moment, de tourner le dos à la société.

Supposons que la troisième personne ait pris l'anneau et l'ait passé à sa main gauche, au 3e doigt et à la première jointure.

Il faudra deviner le nombre 3231. Voici comment on y parviendra :

Vous prierez la personne qui tient l'anneau de faire mentalement, ou avec une plume (et dans ce cas vous tournerez le dos), le calcul suivant : doubler son numéro (dans l'exemple choisi, on obtient 6), retrancher 1 (on obtiendra 5), multiplier le reste par 5 (on obtiendra 25); ajouter le numéro de la main (on obtiendra 27), ajouter 5 (on obtiendra 32), doubler le résultat (on obtiendra 64), retrancher 1 (on obtiendra 63), multiplier par 5 (on obtiendra 315); ajouter le numéro du doigt (on obtiendra 318), ajouter 5 (on obtiendra 323), doubler le résultat (on obtiendra 646), retrancher 1 (on obtiendra 645), multiplier par 5 (on obtiendra 3 225); ajouter le numéro de la jointure (on obtiendra 3 226), ajouter 5 (on obtiendra 3 231).

L'artifice se voit immédiatement : En opérant avec les lettres x, y, z, t, on obtient successivement, en effectuant les opérations indiquées :

$$2x;\ 2x-1;\ (2x-1)5 = 10x-5;\ 10x-5+y;$$
$$10x-5+y+5 = 10x+y;\ (10x+y)2 = 20x+2y;$$
$$20x+2y-1;\ (20x+2y-1)5 = 100x+10y-5;$$
$$100x+10y-5+z; 100x+10y-5+z+5 = 100x+10y+z$$
$$(100x+10y+z)2 = 200x+20y+2z;\ 200x+20y+2z-1;$$
$$1\,000x+100y+10z-5;\ 1\,000x+100y+10z-5+t;$$
$$1\,000x+100y+10z-5+t+5 = 1\,000x+100y+10z+t.$$

Avec les nombres à deviner 3, 2, 3, 1, le résultat obtenu est le nombre 3231.

En somme, cela revient à multiplier le premier nombre par 10, ajouter le second, multiplier le résultat par 10, ajouter le troisième, etc.

Déterminer l'âge d'une personne par une addition simple (Eventail mystérieux). — Il suffit de demander à la personne dans quelles colonnes du tableau ci-dessous se trouve indiqué son âge.

L'âge de la personne est égal à la somme des nombres qui se trouvent en tête des colonnes correspondantes.

Ainsi, supposons que la personne ait 45 ans. Le nombre 45 se trouve dans la 1re colonne, dans la 3e, la 4e et la 6e. Or, les premiers nombres de ces colonnes nous donnent

$$1+4+8+32 = 45.$$

1	2	4	8	16	32	64
3	3	5	9	17	33	65
5	6	6	10	18	34	66
7	7	7	11	19	35	67
9	10	12	12	20	36	68
11	11	13	13	21	37	69
13	14	14	14	22	38	70
15	15	15	15	23	39	71
17	18	20	24	24	40	72
19	19	21	25	25	41	73
21	22	22	26	26	42	74
23	23	23	27	27	43	75
25	26	28	28	28	44	76
27	27	29	29	29	45	77
29	30	30	30	30	46	78
31	31	31	31	31	47	79
33	34	36	40	48	48	80
35	35	37	41	49	49	81
37	38	38	42	50	50	82
39	39	39	43	51	51	83
41	42	44	44	52	52	84
43	43	45	45	53	53	85
45	46	46	46	54	54	86
47	47	47	47	55	55	87
49	50	52	56	56	56	88
51	51	53	57	57	57	89
53	54	54	58	58	58	90
55	55	55	59	59	59	91
57	58	60	60	60	60	92
59	59	61	61	61	61	93
61	62	62	62	62	62	94
63	63	63	63	63	63	95
65	66	68	72	80	96	96
67	67	69	73	81	97	97
69	70	70	74	82	98	98
71	71	71	75	83	99	99
73	74	76	76	84	100	100
75	75	77	77	85		
77	78	78	78	86		
79	79	79	79	87		
81	82	84	88	88		
83	83	85	89	89		
85	86	86	90	90		
87	87	87	91	91		
89	90	92	92	92		
91	91	93	93	93		
93	94	94	94	94		
95	95	95	95	95		
97	98	100				
99	99					

Pour composer ce tableau on peut partir de ce fait qu'avec la série de nombres : 1, 2, 4, 8, 16... (termes d'une progression géométrique de raison 2 et commençant par 1) on peut, par addition, obtenir tous les nombres intermédiaires. On a pris ces nombres comme les premiers des différentes colonnes.

Les nombres 1 et 2 restent où ils sont placés.

Le nombre 3, $1 + 2 = 3$ sera placé dans les colonnes 1 et 2.

Le nombre 4 reste à sa place.

Le nombre 5, $1 + 4 = 5$ est placé à la 1re et à la 3e colonne.

Le nombre 6, $2 + 4 = 6$ est placé à la 2e et à la 3e colonne.

Le nombre 7, $1 + 2 + 4 = 7$ est placé à la 1re, à la 2e et à la 3e colonne, etc.

— En réalité, les tablettes que nous venons d'indiquer ont été composées en partant des nombres écrits dans le système de numération à base 2.

Dans ce système, en utilisant la même convention que celle qui a été admise pour la numération décimale, deux chiffres, 1 et 0, suffisent pour écrire tous les nombres :

NUM. DÉCIM.	NUMÉRATION A BASE 2	NUM. DÉCIM.	NUMÉRATION A BASE 2	NUM. DÉCIM.	NUMÉRATION A BASE 2
1	1	11	1 011	21	10 101
2	10	12	1 100	22	10 110
3	11	13	1 101	23	10 111
4	100	14	1 110	24	11 000
5	101	15	1 111	25	11 001
6	110	16	10 000	26	11 010
7	111	17	10 001	27	11 011
8	1 000	18	10 010	28	11 100
9	1 001	19	10 011	29	11 101
10	1 010	20	10 100	30	11 110

Pour former les tablettes, écrivons sur la première tous les nombres du système décimal dont le chiffre des unités est 1 dans le système binaire, ce sont les nombres impairs.

Dans la deuxième, écrivons tous les nombres du système décimal dont le second chiffre à partir de la droite, dans le système binaire, est 1.

Dans la troisième, écrivons tous les nombres du système décimal dont le troisième chiffre à partir de la droite, dans le système binaire, est 1, etc.

Quand la personne vous indique les cartons sur lesquels se trouve indiqué le nombre qu'elle a choisi vous pourriez vous-même écrire le nombre dans le système binaire. Ainsi, par exemple, si elle vous présente le 2e, le 4e et le 5e cartons, cela indique que dans le système binaire, le nombre cherché comprend 1 unité du second ordre soit 2, 1 unité du 4e ordre soit 8 et 1 unité de 5e ordre soit 16. Le nombre cherché est $2 + 8 + 16 = 26$, c'est la somme des premiers nombres dans chaque tablette indiquée.

— Ce petit jeu a été désigné par Ed. Lucas sous le nom d'*Eventail mystérieux*.

Le chiffre barré. — *Faites écrire un nombre quelconque, puis un second nombre formé avec les mêmes chiffres que le premier mais placés dans un ordre quelconque. Faites soustraire les deux nombres et barrer un des chiffres de la différence. Si l'on vous donne la somme des autres chiffres de cette différence, vous pouvez deviner immédiatement le chiffre barré.*

On démontre en arithmétique qu'un nombre quelconque est égal à un multiple de 9 augmenté de la somme des chiffres du nombre considéré. Il résulte de là que, si deux nombres sont composés des mêmes chiffres, leur différence est un multiple de 9 et par suite la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Dans ces conditions, si l'on connaît la somme des chiffres restants, lorsqu'on aura barré un chiffre dans la différence, le chiffre barré pourra s'énoncer tout de suite.

Ainsi, prenons le nombre 4 561, puis le nombre 5 614.

La différence est 1 053.

Si l'on barre le chiffre 5 par exemple et que l'on connaisse la somme 4 des deux autres, nous pouvons énoncer tout de suite le chiffre barré : puisque la somme totale des chiffres est multiple de 9, le chiffre barré ne peut être que 5.

— Il peut toutefois y avoir ambiguïté si l'on barre, dans la différence, 0 ou 9.

Ainsi, dans la différence précédente, si l'on barre 0 et que l'on donne la somme 9 des chiffres restants, le chiffre barré peut être soit 0 soit 9.

Autre problème de chiffre barré. — *On écrit une certaine quantité de nombres ; on demande à une personne d'en choisir deux quelconques et de faire leur somme puis, dans cette somme,* *d'enlever un chiffre et de donner la somme des chiffres qui restent. On propose d'indiquer alors le chiffre enlevé.*

On aura soin de n'écrire que des nombres qui soient tous divisibles par 9 (on sait qu'un nombre est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9). Dans ces conditions, la somme des deux nombres choisis sera elle-même divisible par 9 et, si l'on connaît la somme des chiffres du nombre obtenu, après avoir enlevé l'un des chiffres, il sera facile de trouver immédiatement le chiffre enlevé puisque la somme de tous les chiffres du nombre est un multiple de 9.

Exemple. — Écrivons les nombres 153, 72, 495, 63, 774...... Supposons que la personne choisisse 153 et 495; la somme de ces nombres est 648; supposons que la personne barre le 6, elle donnera comme somme des autres chiffres 12. Or, le plus petit multiple de 9 à partir de 12 est 18, donc c'est bien $18 - 12 = 6$ qui a été enlevé.

— On peut évidemment faire choisir plus de deux nombres en opérant de la même façon.

— Si le chiffre enlevé était 0 ou 9, on se trouverait placé devant un cas embarrassant. Par exemple, si dans les nombres donnés plus haut la personne choisit 495 et 774 dont la somme est 1 269 et qu'elle enlève le chiffre 9, la somme des chiffres restants est 9 et, par suite, le chiffre enlevé est 9 ou 0, il est impossible de le donner exactement.

Pour ne pas se trouver dans ce cas douteux, il faudrait que les nombres donnés soient choisis de façon que, dans la somme, on ne trouve ni le nombre 0, ni le nombre 9.

Applications du plus petit multiple commun. — *Quel est le plus petit nombre qui divisé par* 10 *donne* 9 *pour reste, divisé par* 9 *donne* 8 *pour reste, divisé par* 8 *donne* 7 *pour reste, etc..., divisé par* 2 *donne* 1 *pour reste.*

Soit N le nombre d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} N &= \text{mult. de } 10 - 1, \\ N &= \quad \text{»} \quad 9 - 1, \\ N &= \quad \text{»} \quad 8 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N &= \quad \text{»} \quad 2 - 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} N + 1 &= \text{mult. de } 10, \\ N + 1 &= \quad \text{»} \quad \text{de } 9, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N + 1 &= \quad \text{»} \quad \text{de } 2. \end{aligned}$$

Il s'agit tout simplement de trouver le plus petit commun multiple des 10 premiers nombres, ce qui donne :

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2\,520.$$
$$N = 2\,519.$$

(*La Nature.*)

Le marchand de pommes. — *Si un marchand de pommes compte celles-ci 2 par 2, il en reste 1 ; 3 par 3, il en reste 2 ; 4 par 4, il en reste 3, etc. ; s'il les compte 7 par 7, il n'en reste pas. Combien a-t-il de pommes, le nombre étant inférieur à 200.*

(C.-G. Bachet.)

Si N est le nombre cherché, N + 1 est un multiple de 2, de 3, de 4, de 5, de 6 et un multiple de 7, + 1.

Le p. p. m. c. de 2, 3, 4, 5, 6 est 60.

Donc N + 1 est un multiple de 60.

On passe en revue les différents multiples de 60, diminués de 1.

59, 119, 179, 239..., etc.

On ne garde de ces nombres que ceux qui sont multiples de 7. Le plus petit est 119.

Donc : $N = 119$.

Le berger et son troupeau. — *Interrogé sur le nombre des moutons de son troupeau, un berger répond : « J'en ai plus de 700, mais moins de 800, et si je les compte par groupes de 8, de 12 et de 15, il m'en reste toujours 7. » Quel est le nombre de moutons?*

Le nombre de moutons, compris entre 700 et 800, est un multiple commun de 8, de 12 et de 15, augmenté de 7.

Le p. p. c. m. de 8, 12 et 15 est 120.

Le seul multiple de 120 compris entre 700 et 800 est 720.

Le nombre cherché est 727.

Le plus petit commun multiple de 2, 3, 4, 5, 6 est 60, il faut trouver un nombre qui soit multiple de 7 et aussi multiple de 60 plus 1.

Propriétés de numération.

Questions. — *De combien le plus petit nombre entier de 3 chiffres surpasse-t-il le plus petit nombre entier de 2 chiffres?*

Le plus petit nombre entier de 3 chiffres est 100 ou 10^2, et le plus petit nombre entier de 2 chiffres est 10 ou 10^1.

Le premier nombre surpasse le second de

$$10^2 - 10^1 = 10\,(10 - 1) = 90.$$

Généralisation : Si nous généralisons la question, nous trouvons que le plus petit nombre entier de n chiffres surpasse le plus petit nombre entier de n' chiffres de :

$$10^{n-1} - 10^{n'-1} = 10^{n'-1}(10^{n-n'} - 1)$$

Question. — *De combien le plus grand nombre entier de 5 chiffres surpasse-t-il le plus grand nombre entier de 2 chiffres?*

Le plus grand nombre entier de 5 chiffres est 99 999, soit 100 000 — 1 ou $10^5 - 1$.

Le plus grand nombre entier de 2 chiffres est 99, soit 100 — 1 ou $10^2 - 1$.

Le premier surpasse le second de :

$$\begin{aligned}(10^5 - 1) - (10^2 - 1) &= 10^5 - 1 - 10^2 + 1,\\ &= 10^5 - 10^2,\\ &= 10^2(10^3 - 1) = 10^2 \times 999 = 99\,900.\end{aligned}$$

Généralisation : Si nous généralisons la question, nous voyons que le plus grand nombre entier de n chiffres surpasse le plus grand nombre entier de n' chiffres de :

$$\begin{aligned}(10^n - 1) - (10^{n'} - 1) &= 10^n - 1 - 10^{n'} + 1,\\ &= 10^n - 10^{n'},\\ &= 10^{n'}(10^{n-n'} - 1).\end{aligned}$$

Question. — *Combien a-t-on tracé de chiffres pour numéroter toutes les maisons d'une rue dont le dernier numéro est 250?*

De 1 à 9, il y a 9 nombres d'un chiffre exigeant. .	9 chiffres,
De 9 à 99, il y a 99 — 9 = 90 nombres de 2 chiffres exigeant 2 × 90 = ...	180 chiffres,
De 99 à 250, il y a 250 — 99 = 151 nombres de 3 chiffres exigeant 3 × 151 = ...	453 chiffres.
Donc, de 1 à 250 on a tracé.	642 chiffres.

Question. — *Combien faut-il de chiffres pour écrire tous les nombres entiers de 1, de 2, de 3, de 4, ... de n chiffres?*

Il y a 9 nombres d'un chiffre exigeant 1 × 9 chiffres.

Il y a 99 — 9 = 90 nombres de 2 chiffres exigeant :

2 × 90 ou 2 × 10 × 9 chiffres;

Il y a 999 — 99 = 900 nombres de 3 chiffres exigeant :

3 × 900 ou $3 \times 10^2 \times 9$ chiffres;

Il y a 9 999 — 999 = 9 000 nombres de 4 chiffres exigeant :

4 × 9 000 ou $4 \times 10^3 \times 9$ chiffres.

En général, il y a : $10^{n-1} \times 9$ nombres de n chiffres exigeant :

$10^{n-1} \times 9 \times n$ chiffres.

Question. — *Combien faut-il de chiffres pour écrire les 9, les 99, les 999, ... les $10^n - 1$ premiers nombres?*

D'après l'exercice précédent,
il y a 9 nombres d'un chiffre exigeant 9 caractères,
il y a 90 » de 2 chiffres » $2 \times 90 = 180$ caractères,
il y a 900 » de 3 » » $3 \times 900 = 2\,700$ caract.
etc......

Donc, pour écrire les 9 premiers nombres, il faut 9 caractères;

Pour écrire les 99 premiers nombres, il faut

$$9 + 180 = 189 \text{ caractères;}$$

Pour écrire les 999 premiers nombres, il faut

$$9 + 180 + 2\,700 = 2\,889 \text{ caractères,}$$

etc......

Généralisons la question, pour cela, remarquons qu'on peut exprimer les résultats trouvés de la façon suivante :

Nombre de caractères pour les nombres de 1 chiffre

$$(10 - 1)\,1;$$

Nombre de caractères pour les nombres de 2 chiffres

$$2\,(10 - 1)\,10;$$

Nombre de caractères pour les nombres de 3 chiffres

$$3\,(10 - 1)\,10^2$$

. . . .

Nombre de caractères pour les n chiffres

$$n\,(10 - 1)\,10^{n-1}.$$

Pour écrire les $10^n - 1$ premiers nombres, il faut donc un nombre de caractères égal à :

$$n\,(10 - 1)\,10^{n-1} + (n - 1)\,(10 - 1)\,10^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$+ 3\,(10 - 1)\,10^2 + 2\,(10 - 1)\,10 + (10 - 1)\,1.$$

Effectuons :

$$\left\{\begin{array}{l} n \times 10^n - n \times 10^{n-1} \\ + (n-1) \times 10^{n-1} - (n-1) \times 10^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ + 4 \times 10^4 - 4 \times 10^3 \\ + 3 \times 10^3 - 3 \times 10^2 \\ + 2 \times 10^2 - 2 \times 10 \\ + 1 \times 10 \;\; - 1 \end{array}\right.$$

Remarquons que les opérations indiquées peuvent se simplifier.

En effet, de l'expression $n \times 10^n$, il faut retrancher $n \times 10^{n-1}$ puis ajouter $(n-1) \times 10^{n-1}$, cela revient à retrancher simplement 10^{n-1}. On peut répéter cela pour tous les autres termes groupés deux à deux de sorte que la somme peut s'écrire :

$$n \times 10^n - 10^{n-1} - 10^{n-2} \ldots - 10^3 - 10^2 - 10 - 1$$

ou encore :

$$n \times 10^n - (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})$$

et nous savons que la somme entre parenthèses équivaut à un nombre composé de n chiffres égaux à 1 et nous avons pour l'expression du nombre cherché :

$$n \times 10^n - \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ chiffres}}$$

Remarque. — Dans cette expression, le produit $n \times 10^n$ est terminé par n zéros, si nous en retranchons un nombre composé de n chiffres égaux à 1, le premier chiffre à droite de la différence sera 9, chacun des chiffres suivants, à cause de la retenue, sera 8 et enfin le dernier chiffre de gauche sera $n - 1$; le nombre de chiffres 8 intermédiaires sera évidemment $n - 2$.

Question. — *Quel est le nombre de pages d'un dictionnaire dont la pagination a nécessité* 3 897 *caractères d'imprimerie?*

Nous savons d'après l'exercice précédent que

pour écrire les 9 premiers nombres il faut 9 caractères,
pour écrire les 99 premiers nombres il faut 189 caractères,
pour écrire les 999 premiers nombres il faut 2 889 caractères,
pour écrire les 9 999 premiers nombres il faut 38 889 caractères.

Comme on a employé 3 897 caractères, et que

$$2\,889 < 3\,897 < 38\,889,$$

le nombre de pages cherché est compris entre 999 et 9 999 : il a donc 4 chiffres.

Or, si les 999 premiers nombres ont exigé 2 889 caractères, la différence

$$3\,897 - 2\,889 = 1\,008,$$

représente les caractères employés pour les nombres de 4 chiffres.

On a donc dû en écrire :

$$1\,008 : 4 = 252,$$

et le dernier nombre écrit est :

$$999 + 252 = 1\,251.$$

Le dictionnaire a 1 251 pages.

Question. — *Dans la pagination précédente, quel est le* 3 000ᵉ *chiffre employé?*

Remarquons que :

$$2\,889 < 3\,000 < 38\,889;$$

donc, ce chiffre appartient à un nombre compris entre 999 et 9 999, c'est-à-dire à un nombre de 4 chiffres.

Or, la différence :

$$3\,000 - 2\,889 = 111$$

représente le nombre de caractères employés pour les nombres de 4 chiffres.

On a donc dû en écrire

$$111 : 4 = 27,$$

et il reste 3 caractères.

Le dernier nombre formé est

$$999 + 27 = 1\,026.$$

Le nombre suivant est 1 027, et allant de la gauche à la droite le dernier caractère employé serait un 2.

Donc, le 3 000e chiffre employé pour écrire la suite des nombres entiers est un 2.

Opérations à compléter.

Addition à compléter. — *Remplacer les lettres et les points par des chiffres.*

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\,e \\ e\,d\,c\,b\,a \\ \hline 8\,.\,6\,.\,. \end{array}$$

sachant qu'on a : $a > b > c > d > e$ et que

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^3 + e^2.$$

L'examen du chiffre 6 montre que $c = 3$.

Il s'ensuit nécessairement $d = 2$ et $e = 1$ ce qui implique

$$a = 7,$$

la condition $a^2 + d^2 = b^2 + c^3 + e^2$

donne $b^2 = 49 + 4 - 27 - 1 = 25$

d'où $b = 5$.

$$\begin{array}{r} 75\,321 \\ 12\,357 \\ \hline 87\,678 \end{array}$$

Effectuer l'addition suivante sachant que le deuxième nombre est double du premier et que dans l'opération on trouve les 9 premiers nombres une seule fois chacun.

Soit A le premier nombre, B son double, C la somme. La solution se trouve par tâtonnement.

1° Le chiffre des unités de B sera toujours pair, soit : 2.4.6.8.

On peut avoir 2 aux unités de B avec 1 aux unités de A ou 6 :

A :	..1	..6
B :	..2	..2
C :	3	8

Dans ce cas (pas de retenue aux unités) le chiffre des dizaines de B sera encore pair. Il ne pourra être ni 2 déjà employé ni 4 par 2 doublé ou par 7 ce qui donnerait $7 + 4 = 11$, 1 déjà employé, ni 6 par 3 déjà employé doublé. Avec 8 on aurait :

$$\begin{array}{r} .81 \\ .62 \\ \hline .43 \end{array}$$

et il resterait 9 7 5 inutilisables aux centaines attendu que l'on ne peut avoir dans cette colonne que le maximum 9 au total par 3 et 6. On ne peut trouver aux dizaines de B 8 double de 4 car on aurait $8 + 4 = 12$ (2 déjà employé). 8 par $9 + 9$ donnerait

$$\begin{array}{r} 91 \\ 82 \\ \hline 73 \end{array}$$

il resterait pour les centaines 4, 5, 6 inutilisables. Il ne reste à essayer aucun chiffre pair. Donc la disposition est impossible. Un raisonnement analogue permet de vérifier les 4 dispositions données ci-dessous :

A :	192	219	273	327
B :	384	438	546	654
C :	576	657	819	981

la somme des chiffres significatifs est respectivement 12, 15 et 18

$$12 + 15 + 18 = 45$$

la somme des 9 premiers chiffres est 45.

Les solutions prises 2 à 2 sont obtenues par permutation circulaire.

(Revue : *le Sphinx*.)

Multiplication à compléter. — *Dans la multiplication indiquée ci-contre, les points remplacent des chiffres inconnus. Peut-on la compléter?*

```
   1.5.2
     ...
  ------
   .....
 7....
 -------
 ....910
```

Dans le multiplicateur, le chiffre des unités est évidemment 5 puisque le chiffre des unités du produit est 0.

Cela nous permet de trouver immédiatement les 3 derniers chiffres du premier produit partiel qui sont 5, 1, 0 et, comme 1 est le chiffre des dizaines du résultat, le chiffre des dizaines du multiplicande est 6, ou 2, ou 0. Le chiffre des unités du second produit partiel est forcément pair donc le chiffre des centaines du premier produit partiel est impair, ceci exclut immédiatement les chiffres 6 et 2 comme dizaines du multiplicande ; reste le chiffre zéro.

Le chiffre des dizaines du multiplicateur est zéro, cela résulte de la place occupée par le second produit partiel.

```
   10502
     705
 -------
   52510
 73514
 -------
 7403910
```

Le 3e chiffre du multiplicateur doit donner au produit partiel correspondant $9 - 5 = 4$, c'est donc 2 ou 7 ; mais le dernier chiffre de ce produit partiel est 7, le dernier chiffre du multiplicande étant 1. Le 3e chiffre du multiplicateur est 7.

Pour les dizaines de mille du multiplicande, le chiffre correspondant ne peut être que 0 puisque le second produit partiel a 7 pour chiffre de ses plus hautes unités.

Le multiplicande et le multiplicateur se trouvent ainsi reconstitués.

Multiplication à compléter. — *Remplacer les points par des chiffres.*

```
  2...
    ..
 -----
  5...
 82..
 -----
 87...
```

Le chiffre subsistant dans le 1er produit partiel indique que le chiffre des unités du multiplicateur ne peut être que 2. Comme la preuve donne 5 pour somme des chiffres du multiplicateur, celui-ci est 32.

Ceci, comme le 2ᵉ produit partiel, nous montre par la retenue reportée sur la dernière colonne à gauche, qui est 2

$$3 \times 2 + 2 = 8,$$

que le chiffre des centaines du multiplicande est 7. La preuve donne pour somme des chiffres du multiplicande 8, et les chiffres connus 7 et 2 font 9 qui ne compte pas dans la preuve par 9 : donc les chiffres des unités et dizaines additionnés font 8 ; ce peut être $4 + 4$, 3 et 5 ou 5 et 3, 6 et 2 ou 2 et 6, 1 et 7 ou 7 et 1.

Le chiffre des dizaines doit être < 5 car $2\,750 \times 32 = 88\,000$, le chiffre des mille de ce produit est trop fort, à cause des retenues au 3ᵉ rang des produits partiels. Si d'autre part on emploie un chiffre < 4, il n'y a pas de retenue reportée à cette place, le 2ᵉ produit partiel commence par 81 au lieu de 82 donnés dans le problème, *sauf avec le chiffre* 3 la retenue portée des unités sur les dizaines faisant 10 avec le produit 3×3, d'où à nouveau report sur la colonne suivante. D'où les solutions suivantes.


```
 2744
   32
 ----
 5488
8232
-----
87808
```

et


```
 2735
   32
 ----
 5470
8205
-----
87520
```

Multiplication à compléter. — *Dans une multiplication de deux nombres de 3 chiffres, un certain nombre de ces chiffres se trouvent effacés, peut-on, à l'aide de ceux qui restent, reconstituer l'opération ?*

```
   ..7
   ...
  ----
  4...
 8..
 -----
 ...02
```

Le chiffre des unités du multiplicateur ne peut être que 6 puisque le chiffre des unités du produit partiel correspondant est 2.

Le second chiffre du multiplicateur est évidemment 0, cela résulte de la disposition du second produit partiel.

Le chiffre des dizaines du premier produit partiel est 0 puisqu'au résultat le chiffre des dizaines est 0.

Le chiffre des dizaines du multiplicande est 6 ou 1 puisque son produit par 6 augmenté de la retenue 4 donne un nombre exact de dizaines.

Essayons 6 : le chiffre des centaines du multiplicande ne peut être alors que 6 ou 7 puisque son produit par 6 augmenté de 4 donne 4 dizaines.

Ce n'est pas 6 car le chiffre des centaines du multiplicateur ne pourrait être que 1 puisque le second produit partiel est compris entre 800 et 900; c'est impossible.

Ce n'est pas 7 non plus pour la même raison.

En somme, le chiffre des dizaines du multiplicande n'est pas 6, ce ne peut être que 1.

Dans ces conditions, le chiffre des centaines du multiplicande ne peut être que 7 ou 8.

Ce ne peut pas être 7, puisque le nombre des centaines du second produit partiel est 8; c'est donc 8.

Le chiffre des centaines du multiplicateur est alors 1 et les facteurs de la multiplication sont 817 et 106.

Multiplication à compléter. — *Compléter la multiplication ci-dessous.*

```
   .0..
    ...
 ------
   ...0
  .1...
 .4...
 ------
 2....4.
```

Le multiplicande est 3045, le multiplicateur 872, le chiffre des mille du multiplicande et celui des dizaines du multiplicateur sont 9 et 9 ou l'un des deux est 7 et l'autre 3.

Ils ne sont pas égaux à 9 car dans le dernier produit partiel, le chiffre des mille étant 4, le chiffre des centaines du multiplicateur devrait être 6 et alors on n'aurait pas 2 pour chiffre des plus hautes unités du produit. Ces chiffres sont donc 3 et 7.

Le chiffre des mille du multiplicande n'est pas 7 car le chiffre des centaines du multiplicateur serait 2, le produit n'aurait pas 2 pour chiffre de ses unités les plus élevées.

Donc le chiffre des mille du multiplicande est 3, celui des dizaines du multiplicateur est 7.

On complétera facilement : le chiffre des centaines du multiplicateur est 8.

Son chiffre des unités est forcément 2, car le chiffre des unités du premier produit partiel étant 0, les unités des deux facteurs sont 2 et 5 ou 4 et 5 ou 6 et 5 ou 8 et 5 ou encore le chiffre des unités du multiplicande est 0 et celui du multiplicateur un chiffre significatif quelconque.

En somme, le produit partiel correspondant n'ayant que 4 chiffres, on pourra prendre pour chiffre des unités du multiplicande 5 et 2 pour celui des unités du multiplicateur ou encore 0 pour chiffre des unités du multiplicande et 1, 2 ou 3 pour unités du multiplicateur.

On obtiendra ainsi les solutions suivantes :

$$3\,045 \times 872$$
$$3\,040 \times 871$$
$$3\,020 \times 872$$
$$3\,080 \times 873$$

Division à reconstituer. — *Pendant que Jean-Pierre faisait une division, sa sœur Martine s'amusait à recouvrir, avec des pions d'un jeu de dames, les chiffres que son frère alignait laborieusement. Deux chiffres de cette division sont restés visibles. Peut-on reconstituer la division* (1)?

```
...97..  | ..
...      |------
---      | .089.
   ..    |
   ..
  ---
    ...
    ...
    ---
      1
```

On voit tout de suite que le second et le quatrième chiffre du quotient sont des zéros puisqu'il a fallu abaisser deux chiffres du dividende pour constituer les dividendes partiels correspondants.

Le diviseur a deux chiffres, son produit par 8 ne donne qu'un nombre de deux chiffres ainsi qu'il est indiqué dans la division partielle correspondante ; donc ce diviseur est au plus égal à 12 ; d'autre part, le produit de ce diviseur par le dernier chiffre du quotient donne un nombre de 3 chiffres. Ce diviseur ne peut pas être inférieur à 12.

Le diviseur est donc égal à 12 et le dernier chiffre du quotient est 9.

Le premier chiffre de ce quotient est également 9 puisque son produit par 12 donne un nombre de trois chiffres.

Les trois premiers chiffres du dividende sont 108, produit de 12 par 9.

Le quatrième chiffre du dividende est 9 et le cinquième est 7 puisque si l'on retranche $12 \times 8 = 96$ du dividende partiel

(1) Kraitchik, *la Mathématique des jeux.*

correspondant, il reste 1. Les deux derniers chiffres du dividende sont évidemment 0 et 9.

```
1089709  | 12
108      |------
-------  | 90809
   97
   96
   ---
    109
    108
    ---
      1
```

Division à compléter. — *Remplacer les points par des chiffres.*

```
.8....  | 8.
..      |------
-----   | 1...9
 ...
 3..
 ----
  ...
  ...
  ---
    2
```

Le chiffre des plus hautes unités du quotient est évidemment 1 puisque son produit par le diviseur est inférieur à 100.

Le second chiffre du quotient est 0, cela résulte de la formation du second dividende partiel.

Le quatrième chiffre est également 0.

Le chiffre des centaines du second dividende partiel est forcément 3 et par suite le chiffre des unités du diviseur est 5. On en déduit immédiatement que le dividende est 884 767 et le diviseur 85.

Division à compléter. — *Remplacer les points par des chiffres.*

```
.46....  | ..1
..1.     |------
-----    | ...9
 ...
 .7.
 -----
  ....
  ....
  -----
    0.
```

Le dividende est 1 464 339, le diviseur 471 et le quotient 3 109.

Le dernier chiffre du dividende est évidemment 9; le chiffre des dizaines du quotient est 0.

Le produit du chiffre des mille du quotient par le chiffre des dizaines du diviseur a pour chiffre des unités 1; ces deux chiffres sont donc 9 et 9 ou 1 et 1, 3 et 7.

Ce ne peut pas être 9 et 9 car le second dividende partiel est inférieur à 600. Le chiffre des mille du quotient ne peut pas être 1 parce que le produit du diviseur par 1 ne donnerait qu'un nombre de 3 chiffres. Ces deux chiffres sont donc 7 et 3.

Supposons que le chiffre 3 soit au diviseur et 7 au quotient. Le chiffre des centaines du diviseur ne peut être alors que 6, car son produit par 7 augmenté de 2 doit avoir 4 pour chiffre des unités. Le diviseur serait alors 631, ce qui est impossible à cause de la seconde division partielle. Donc 7 est au diviseur, 3 au quotient. On en déduit immédiatement que le chiffre des centaines du diviseur est 4; le diviseur est 471, on achèvera facilement la reconstitution, connaissant la dernière division partielle.

Extraction de racines carrées à compléter. — Dans les récréations qui suivent, nous admettons que la disposition prise dans l'extraction d'une racine carrée est celle qui est indiquée ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
417239 & 645 \\ \hline
36 & 124 \times 4 \\ \hline
572 & 1\,285 \times 5 \\
496 & \\ \cline{1-1}
7639 & \\
6425 & \\ \cline{1-1}
1214 &
\end{array}$$

1° *Compléter l'opération indiquée ci-dessous et relative à une extraction de racine carrée.*

$$\begin{array}{r|l}
.9.... & ... \\ \cline{2-2}
.. & ... \\ \cline{1-1}
.... & \\
...9 & \\ \cline{1-1}
9 &
\end{array}$$

Le chiffre des centaines de la racine est 7, puisque son carré a 9 pour chiffre des unités. On en conclut immédiatement que la première tranche du nombre cherché est 49 et que le chiffre des dizaines de la racine est 0. Le double de la racine trouvée est 140.

Le chiffre des unités de la racine cherchée est tel que son carré a 9 pour chiffre des unités; d'autre part, la seconde tranche du nombre cherché est inférieure à 70; le chiffre des unités de la racine est forcément 3; ce ne peut être 7 car $1\,407 \times 7 = 9849$ la seconde tranche du nombre cherché serait supérieure à 98. La racine du nombre est donc 703, le reste est 9 et le nombre 494 218.

2° Compléter l'extraction de la racine carrée indiquée ci-dessous.

```
.....  | .9.
.      |------
---    |  ..×.
...      3..×.
...
----
 ....
 ..4.
 ----
```

Le chiffre 3 indiqué au second produit montre que le chiffre des centaines de la racine est 1.

Le chiffre des plus hautes unités du nombre cherché est 2 ou 3, mais le double de la racine soit 2; avec 9 pour chiffre des unités, soit 29 donne pour produit par 9, 261; le nombre duquel on doit retrancher 261 doit être supérieur à ce dernier, son chiffre des plus hautes unités est au moins 2, donc le chiffre des plus hautes unités du nombre cherché est 3.

Le chiffre des unités de la racine est au moins égal à 3 puisque le dernier produit a 4 chiffres, d'autre part dans ce produit, le chiffre des dizaines est 4; le chiffre des unités ne peut être que 3 et le produit correspondant est 1 149.

L'opération se faisant exactement, on en déduit tous les autres chiffres encore inconnus.

Le nombre est 37 249, la racine 193.

2° Compléter l'opération d'extraction de racine carrée indiquée ci-dessous.

```
..0...0 | ....
.       |--------
-----   |  ...×.
 ....     2....×.
 ...1
-----
  .....
  .....
 ------
    ..5
```

Le chiffre des milles de la racine est 1, puisque nous avons 2 au double de la racine trouvée. Le premier chiffre du nombre est 1.

Le chiffre des centaines de la racine est 0, cela résulte de l'abaissement de 2 tranches consécutives.

Le chiffre des dizaines de la racine est 9 ou 1, puisque son carré a 1 pour chiffre des unités; or, ce ne peut être 1 puisque le produit correspondant a 4 chiffres, c'est donc 9 et le produit correspondant 1881. Il résulte de là que le second chiffre du nombre est 2 ou 1. On voit de suite que ce ne peut être 1.

Le chiffre des unités à la racine est 5 puisque le chiffre des unités du carré de la racine est 5.

Le quatrième chiffre du nombre est 0, cela résulte de ce que le reste n'a que 3 chiffres.

En somme, la racine du nombre est 1 095 et le nombre 1200. .0; les deux chiffres non déterminés pourront être pris arbitrairement pourvu que le nombre qu'ils forment soit inférieur ou égal à 92.

4° *Rétablir les chiffres dans l'extraction de la racine carrée suivante.*

$$\begin{array}{r|l}
a\,b\,c\,d & d\,a \\ \cline{2-2}
\underline{g\,d} & e\,f\,a \\
a\,c\,d & \quad\;\; a \\ \cline{2-2}
\underline{a\,c\,d} & a\,c\,d \\
0\,0\,0 &
\end{array}$$

sachant que $d = 1{,}50\,a$.

Puisque $d = 1{,}50\,a$, a est un nombre pair;

D'autre part le nombre $d\,a$ peut s'écrire

$$15\,a + a = 16\,a$$

Son carré, qui est $256a^2$ ayant 4 chiffres, a ne peut être égal à 8: Les seules valeurs possibles de a sont :

$$2,\ 4 \text{ ou } 6$$

et les valeurs correspondantes de d sont :

$$3,\ 6 \text{ ou } 9.$$

Remarquons la multiplication :

$$e\,f\,a \times a$$

On en conclut que $a \times a$ donne un nombre finissant par d. Donc seules les valeurs $a = 4$ $d = 6$ conviennent.

Elles donnent satisfaction à la condition que,

$$d^2 = 36$$

soit égal au nombre gd, par suite

$$g = 3.$$

Nous remarquons encore que le nombre

$$ef \text{ vaut } 2d = 12$$

donc : $\qquad e = 1 \quad f = 2$

Puisque l'opération a un reste nul, nous aurons facilement *a b c d* en faisant le carré de *d a* que nous connaissons maintenant

$$64^2 = 4\,096,$$

d'où $$b = o \text{ et } c = 9;$$

En définitive l'opération s'écrit :

$$\begin{array}{r|l} 4096 & 64 \\ \cline{2-2} 36 & \overline{124} \\ \cline{1-1} 496 & 4 \\ \cline{2-2} 496 & 496 \\ \cline{1-1} 000 & \end{array}$$

PROBLÈMES AMUSANTS

Problèmes d'arithmétique ou d'algèbre.

Effectuer des pesées avec le jeu de poids le plus simple possible. — *On dispose de 5 poids pesant chacun un nombre entier de kilogrammes pour peser tous les poids de 1 kg à 121 kg inclus par combinaisons de ces cinq poids. Quels sont ces cinq poids?*

Avec un poids de 1 kg on peut peser 1 kg.

Pour peser 2 kg, prenons un poids de 1 kg et un de 3 kg. Avec deux poids de 1 kg et 3 kg, on peut peser tous les poids de 1 à 4 kg.

Pour peser 5 kg mettons 1 kg et 3 kg dans un plateau et 9 kg dans l'autre.

Avec trois poids de 1 kg, 3 kg et 9 kg on peut peser les poids de 1 kg à 13 kg.

Pour peser 14 kg, mettons 1 kg, 3 kg, 9 kg dans un plateau et 27 dans l'autre.

Avec 4 poids de 1 kg, 3 kg, 9 kg et 27 kg, on peut peser les poids de 1 kg à 40 kg.

Pour peser 41 kg, mettons 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg dans un plateau et 81 kg dans l'autre.

Avec 5 poids de 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg et 81 kg on peut peser les poids de 1 kg à 121 kg.

REMARQUE. — Les nombres 1, 3, 9, 27, 81..., forment une progression géométrique de raison 3 dont la somme des termes est 121.

Avec les combinaisons des nombres formant la progression

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots\ 3^{n-1}$$

on peut obtenir par addition ou soustraction toute la suite des nombres de 1 à $\frac{3^n-1}{3-1}$ c'est-à dire de 1 à $\frac{3^n-1}{2}$.

Le loup, la chèvre et le chou. — *Sur le bord d'une rivière se trouvent un loup, une chèvre et un chou; un batelier entreprend de les passer sur l'autre bord, mais son bateau est si petit qu'il ne peut passer chaque fois que l'un des trois colis à transborder. Comment doit-il s'y prendre de façon que le loup ne reste pas seul avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou?* (Nicolas CHUQUET. [1])

Le batelier passera d'abord la chèvre, puis il retournera prendre le loup. Il déposera le loup sur l'autre rive puis ramènera la chèvre qu'il laissera sur la première rive pendant qu'il passera le chou. Enfin il retournera à vide chercher la chèvre qu'il passera. De cette façon le loup ne s'est trouvé avec la chèvre et celle-ci avec le chou qu'en présence du batelier.

Les trois maris jaloux. — *Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes, sur le bord d'une rivière et désirent passer sur l'autre bord. Ils rencontrent un bateau sans batelier, mais ce bateau est si petit qu'il ne peut porter que deux personnes à la fois. On demande comment s'effectuera le passage de façon que chaque femme ne reste pas en la compagnie d'un ou de deux hommes si son mari n'est pas là.*

La solution est donnée par les vers latins suivants :

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem,
Itque una. Utuntur tunc duo puppe viri
Par vadit et redeunt bini, mulierque sororem
Advehit, ad propriam fine maritus abit.

Ce qui signifie :

Deux femmes passent d'abord, l'une revient et fait passer la troisième. Une femme revient alors et reste avec son mari. Les deux autres maris traversent et vont vers leurs femmes. Une femme revient avec son mari, débarque et les deux hommes passent de l'autre côté. La seule femme qui se trouve de ce côté viendra successivement chercher les deux autres ou encore, vient en chercher une puis cède la barque au mari de la dernière qui va la chercher.

Le partage du vin. — 1° *Une personne a une bonbonne de douze litres* (2) *pleine de vin; elle en veut donner 6 litres à un ami. Pour*

(1) Cette récréation bien connue se trouve indiquée dans un ouvrage d'Alcuin datant du VIII^e siècle.

(2) Dans cet exercice et les suivants le mot pinte a été remplacé par litre.

les mesurer, elle n'a que deux autres bouteilles l'une contenant 7 litres, l'autre contenant 5 litres. Comment doit-elle opérer pour avoir les 6 litres dans la bonbonne de 7 litres?

(Ozanam.)

La solution est donnée par le tableau suivant qui indique la suite des opérations à effectuer : la bouteille de 12 litres étant appelée A, celle de 7 litres, B, celle de 5 litres, C.

	12	7	5	
	A	B	C	
1er état.....	12	0	0	
2e »	7	0	5	On remplit le vase C.
3e »	7	5	0	On verse le contenu de C dans B.
4e »	2	5	5	On remplit de nouveau C.
5e »	2	7	3	On remplit B avec C.
6e »	9	3	0	On verse B dans A et C dans B.
7e »	4	3	5	On remplit C avec A.
8e »	4	7	1	On remplit B avec C.
9e »	11	0	1	On verse B dans A.
10e »	11	1	0	On verse C dans B.
11e »	6	1	5	On remplit C avec A.
12e »	6	6	0	On verse C dans B.

2° *Une personne a une bouteille de huit litres pleine de vin. Elle veut en donner 4 litres à un ami, mais elle n'a pour les mesurer que deux autres vases, l'un de 5, l'autre de 3 litres. Comment doit-elle faire pour mettre 4 litres dans le vase de 5 litres?*

(Nicolas Chuquet.)

Ce problème, analogue au précédent, a sa solution donnée par chacun des tableaux ci-dessous :

	8	5	3
	A	B	C
1er état.......	8	0	0
2e »	3	5	0
3e »	3	2	3
4e »	6	2	0
5e »	6	0	2
6e »	1	5	2
7e »	1	4	3

	8	5	3
	A	B	C
1er état.......	8	0	0
2e »	5	0	3
3e »	5	3	0
4e »	2	3	3
5e »	2	5	1
6e »	7	0	1
7e »	7	1	0
8e »	4	1	3
9e »	4	4	0

— On peut également proposer de partager les huit litres en deux parties égales. Les deux solutions données conduisent au résultat.

— Nicolas Chuquet donne encore plusieurs récréations analogues : avec des vases de 16 l, 9 l et 7 l, pour partager 16 litres; avec des vases de 16 l, 11 l et 6 l, pour partager 16 litres; avec des vases de 42 l, 27 l et 12 l, pour partager 42 litres. — Tous ces exercices ont été reproduits dans le traité de Claude-Gaspard Bachet, sieur de Meziriac (1612).

3° *Trois vases contiennent respectivement* 19 *l*, 13 *l et* 7 *l; les deux derniers sont pleins et le premier vide. On demande, dans ces conditions, de mesurer* 10 *litres de vin.*

Le tableau suivant donne une solution (nous avons mis en colonne verticale les états successifs du vin contenu dans les vases) :

CONTENU	1er état	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e	11e	12e	13e	14e	15e	16e
19	0	7	19	12	12	5	5	18	18	11	11	4	4	17	17	10
13	13	13	1	1	8	8	13	0	2	2	9	9	13	0	3	3
7	7	0	0	7	0	7	2	2	0	7	0	7	3	3	0	7

Trois voleurs embarrassés. — *Trois voleurs dérobent* 24 *onces de baume. En fuyant ils rencontrent dans un bois un marchand auquel ils achètent hâtivement* 3 *vases dans le but de partager leur vol. Arrivés dans un endroit sûr, ils veulent effectuer ce partage mais s'aperçoivent que leurs vases contiennent respectivement* 5, 11 *et* 13 *onces. Comment vont-ils s'y prendre pour faire* 3 *parts égales?*

(TARTAGLIA[1]).

Le tableau suivant donne une solution : (Chaque ligne indique les états successifs des vases.)

---

(1) Tartaglia (1500-1557), mathématicien italien, qui a donné de nombreuses récréations mathématiques dans son *Trattato de numeri e misuri* (1556).

			vases vides	
Contenances....	24	5	11	13
1º....	11	0	0	13
2º....	11	5	0	8
3º....	11	5	8	0
4º....	0	5	8	11
5º....	0	3	8	13
6º....	8	3	0	13
7º....	8	0	3	13
8º....	8	5	3	8
9º....	8	0	8	8

Pair ou impair. — *Une personne ayant dans une main un nombre pair d'objets, de pièces d'argent par exemple, et dans l'autre un nombre impair, deviner en quelle main est le nombre pair.*

(Nicolas Chuquet.)

Faites multiplier le nombre de pièces contenues dans la main droite par un nombre pair quelconque, celui de la main gauche par un nombre impair quelconque et faites ajouter les deux produits.

Si la somme est impaire, le nombre pair est dans la main droite.

Si la somme est paire, le nombre pair est dans la main gauche.

Le résultat s'explique facilement :

Le produit d'un nombre par un nombre pair est un nombre pair.

Si le nombre correspondant à la main gauche est impair, son produit par un nombre impair est impair et la somme des deux produits est impaire.

Au contraire, si le nombre correspondant à la main gauche est pair son produit par un nombre impair est pair et la somme des deux produits est paire.

Il y a évidemment une solution plus simple :

Faire multiplier le nombre correspondant à la main droite par un nombre pair quelconque et ajouter au produit l'autre nombre, si le résultat est pair, le nombre pair de pièces est dans la main gauche, dans le cas contraire, il est dans la main droite. L'explication est immédiate.

On peut évidemment opérer avec deux personnes qui ont pris, l'une un nombre pair de jetons, l'autre un nombre impair. Au lieu de prendre des jetons, on pourra, de la même façon, opérer avec deux pièces de monnaie, l'une représentant un nombre pair de francs, l'autre un nombre impair.

Le donateur original. — *Cinq personnes sont numérotées* 1, 2, 3, 4, 5. *Un mathématicien original voulant leur faire un cadeau leur donne un jeton à chacune. La première reçoit un jeton marqué* 5, *la deuxième un jeton marqué* 25, *la troisième un jeton marqué* 125, *etc.*

Il les met en présence des 5 *objets qu'il veut leur offrir et qui sont marqués* 1, 2, 3, 4, 5, *et les prie de multiplier le numéro de l'objet choisi par celui de leur jeton. Il additionne les produits obtenus et trouve* 9 615 *; il prétend qu'il peut ainsi trouver quel objet chaque personne a choisi. Est-ce vrai?* (Abbé Huelle.)

Soient x, y, z, t, u les numéros des objets.

On a :

$$5x + 25y + 125z + 625t + 3\,125u = 9\,615$$

d'où
$$x + 5y + 25z + 125t + 625u = 1\,923.$$

Les 4 derniers termes de l'équation étant divisibles par 5, x est nécessairement le reste de la division de 1923 par 5 : c'est-à-dire 3.

Donc : $$x = 3.$$

On a alors :

$$5y + 25z + 125t + 625u = 1\,920$$
$$y + 5z + 25t + 125u = 384.$$

Donc : $$y = 4.$$

En opérant ainsi de proche en proche, on trouve :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ t = 5 \\ u = 2 \end{cases}$$

Les trois Grâces et les neuf Muses. — *Les trois Grâces possédant un même nombre de pommes sont rencontrées par les neuf Muses. Elles partagent leurs pommes avec les Muses, elles en donnent à chacune le même nombre et, après le partage, elles ont toutes le même nombre de pommes. Combien chaque Grâce avait-elle de pommes?* (*Anthologie grecque.*)

Comme chaque déesse possède, après le partage, le même nombre de pommes, c'est que le nombre total des pommes est un multiple de 12, mais chaque Grâce avait, à l'origine, le même nombre de pommes, ce nombre est un multiple de 3.

Dans ces conditions, on voit que 12 constitue une solution ainsi que tout multiple de 12.

Si les Grâces ont chacune 12 pommes, elles en conserveront chacune trois et en donneront 27 aux Muses, chacune de ces dernières en aura également 3.

Si les Grâces ont chacune 24 pommes, elles en conserveront chacune 6 et en donneront 54 aux Muses, chacune de ces dernières en aura également 6, etc.

Le lion de bronze. — *Je suis un lion de bronze. Mes yeux, ma bouche et mon pied droit sont des fontaines. L'œil droit remplirait un bassin en 2 jours, l'œil gauche en 3 jours et mon pied en 4 jours. Ma bouche mettrait simplement 6 heures. S'ils versaient l'eau tous à la fois, combien leur faudrait-il de temps pour remplir le bassin?*

(*Anthologie.*)

En une heure l'œil droit remplit $\frac{1}{48}$ du bassin, l'œil gauche $\frac{1}{72}$, le pied $\frac{1}{96}$ et la bouche $\frac{1}{6}$.

Fraction du bassin remplie en une heure :

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{96}+\frac{1}{6}=\frac{6+4+3+48}{288}=\frac{61}{288}$$

Temps cherché

$$\frac{288}{61} \text{ heures} = 4 \text{ heures } \frac{44}{61} = 4 \text{ heures } 43 \text{ minutes } 56 \text{ secondes.}$$

Le partage du vin et des tonneaux. — *Distribuer entre 3 personnes vingt et un tonneaux, dont sept pleins, sept vides et sept à moitié pleins, en sorte que chacune ait la même quantité de vin et de tonneaux.*

Ce problème peut se résoudre facilement par l'algèbre; on en trouvera plus aisément la solution par un raisonnement très simple :

Le vin à partager comprend $7+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$ tonneaux.

Chaque personne doit avoir la quantité de vin contenue dans $\frac{7}{2}$ tonneaux.

Pour faire $\frac{7}{2}$ tonneaux, il en faut au moins 1 à moitié plein.

A la première personne, on peut donc donner, *à priori*, soit un, soit deux, soit trois tonneaux pleins, le cas où on ne lui en donnerait pas doit être rejeté immédiatement :

1° Si on lui donne 1 tonneau plein, elle devra avoir $\left(\frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}\right)$ 5 tonneaux à moitié pleins et par suite 1 tonneau vide.

La seconde personne ne peut avoir qu'un tonneau à moitié plein puisque 5 sont déjà distribués et qu'il en doit rester un pour le dernier. On complétera la solution en remarquant que le total du vin distribué à chaque personne est $\frac{7}{2}$ tonneaux et que le total des tonneaux est de 7 pour chaque personne.

On arrive ainsi à une première solution :

	Tonneaux pleins	à moitié pleins	vides.
1re personne	1	5	1
2e »	3	1	3
3e »	3	1	3

2° Si on donne à la première 2 tonneaux pleins, elle devra avoir 3 tonneaux à moitié pleins et 2 tonneaux vides.

Il restera pour les deux autres, 4 tonneaux à moitié pleins.

A la seconde, on ne peut donner que 1 ou 3 tonneaux à moitié pleins, car il est impossible de lui en donner deux, elle aurait en tout un nombre exact de tonneaux pleins. Si on lui en donne 1 elle aura 1 tonneau à moitié plein et par suite 3 tonneaux pleins d'où la solution :

	Tonneaux pleins	à moitié pleins	vides.
1re personne	2	3	2
2e »	3	1	3
3e »	2	3	2

Si on donnait à la seconde personne 3 tonneaux à moitié pleins on retrouverait la même solution, la 3e personne prenant la place de la 2e.

Autre partage de vin et de tonneaux. — *Partager 24 tonneaux dont 5 pleins, 8 vides et 11 à moitié pleins entre 3 personnes de manière que chaque personne ait le même nombre de tonneaux et la même quantité de liquide.*

(C.-G. Bachet.)

Il y a plusieurs solutions données par Bachet.

Première solution :

	1re Personne	2e personne	3e personne
Tonneaux pleins........	0	2	3
Tonneaux à moitié pleins	7	3	1
Tonneaux vides	1	3	4

Deuxième solution :

Tonneaux pleins	1	2	2
Tonneaux à moitié pleins	5	3	3
Tonneaux vides	2	3	3

Troisième solution :

Tonneaux pleins	1	1	3
Tonneaux à moitié pleins	5	5	1
Tonneaux vides	2	2	4

Le problème du chef de cuisine. — *Un chef de cuisine distribue un certain nombre d'œufs à ses marmitons. Au premier, il donne la moitié de ses œufs plus $\frac{1}{2}$ œuf ; au second, il donne la moitié de ce qui lui reste plus $\frac{1}{2}$ œuf, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous ses œufs soient distribués. Chaque marmiton ayant eu une part, combien y a-t-il de marmitons et combien le chef possédait-il d'œufs, étant donné qu'il n'a pas été besoin de casser aucun œuf ?*

Le problème ainsi posé est indéterminé, on peut prendre comme nombre d'œufs une puissance quelconque du nombre 2 diminuée de 1.

Les puissances successives de 2 sont :

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256......

Chacun de ces nombres possède la propriété suivante : diminué de 1, il donne un reste dont la moitié augmentée de $\frac{1}{2}$ donne un nombre entier dont la moitié augmentée de $\frac{1}{2}$ est encore un nombre entier et ainsi de suite.

Ainsi on peut prendre comme nombre d'œufs 63.

Le chef donne au premier marmiton : $\frac{63}{2} + \frac{1}{2} = 32$ (5^e puissance de 2). Reste 31.

Il donne au second : $\frac{31}{2} + \frac{1}{2} = 16$ (4^e puissance de 2). Reste 15.

Il donne au troisième : $\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$ (3^e puissance de 2). Reste 7.

Il donne au quatrième : $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$ (2^e puissance de 2). Reste 3.

Il donne au cinquième : $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ (1re puissance de 2). Reste 1.

Il donne au sixième : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63.$$

Le nombre des marmitons est 6.

Le nombre d'œufs est une puissance de 2 égale au nombre des marmitons et diminuée de 1. Ainsi, dans l'exemple précédent, le nombre d'œufs est $2^6 - 1$.

Généralisation. Si l'on se donne le nombre de marmitons, le problème n'est plus indéterminé et se résout facilement.

Supposons qu'il y ait 5 marmitons et soit x le nombre d'œufs. Il donne au premier $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$; il lui reste $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$.

Il donne au second $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$; il lui reste $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$.

Il donne au troisième $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$; il lui reste $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$.

Il donne au quatrième $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-7}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{16}$; il lui reste $\frac{x-7}{8} - \frac{x+1}{16} = \frac{x-15}{16}$.

Il donne au cinquième $\frac{1}{2}\frac{x-15}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{32}$.

On doit avoir :

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \frac{x+1}{16} + \frac{x+1}{32} = x.$$

On en déduit $31x + 31 = 32x$ et $x = 31$ soit $2^5 - 1$.

On trouve ce problème ancien dans de nombreux traités élémentaires d'algèbre souvent sous la forme suivante :

Une marchande d'œufs va au marché, elle vend à une première personne la moitié de ses œufs plus $\frac{1}{2}$ *œuf ; à une seconde..., etc. Combien avait-elle d'œufs?*

Chavignaud, dans son arithmétique mise en vers en a donné l'énoncé suivant :

Un jour le cuisinier d'un puissant personnage
Afin de contenter trois filles du village
Qui demandaient des œufs, leur dit en les voyant :
Je vais donner tous ceux que j'ai dans ce moment.
Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un œuf par faveur singulière;
A la seconde, il offre aussi du meilleur cœur
La moitié qui lui reste avec même faveur
De la moitié d'un œuf dont la fille s'empare.
Enfin continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié
De son troisième reste encore l'humble moitié
Plus la moitié d'un œuf; il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage
Qui paraît singulier, combien en avait-il?
Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil
Pour donner des moitiés à chaque jeune fille
Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile?

La vie de Diophante. — *Voici la tombe qui renferme les cendres de Diophante; elle est merveilleuse car, en utilisant un artifice arithmétique, elle apprend toute sa vie. Il resta enfant pendant le sixième de sa vie; après un autre douzième ses joues se couvrirent de barbe; après un septième, il alluma le flambeau* *du mariage; cinq ans après, il lui naquit un fils; mais celui-ci, enfant malheureux, quoique passionnément aimé, mourut arrivé à peine à la moitié de l'âge atteint par son père. Diophante vécut encore quatre ans, adoucissant sa douleur par des recherches sur la science des nombres.* (*Anthologie grecque.*)

Si x est l'âge auquel est mort Diophante, on a :

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

La résolution de l'équation donne $x=\frac{756}{9}=84$ ans.

Diophante resta donc enfant jusqu'à 14 ans; à 21 ans, il commença à avoir de la barbe; à 33 ans, il se maria; à 38 ans il eut un fils; à 80 ans, ce fils mourut.

— Ces données sur la vie de Diophante ne paraissent pas avoir grand intérêt historique. Elles semblent avoir été inventées simplement pour forger un problème d'arithmétique.

Chacun son écot. — *Trois personnes dînent ensemble, la première fournit 5 plats, la deuxième 3 plats, la troisième ne fournit rien. Les frais étant communs, la troisième donne 8 francs pour payer sa part. Que revient-il à chacune des deux autres, si l'on suppose que les plats fournis coûtent le même prix?*

(*Problème d'origine arabe.*)

Si on ne réfléchit pas, l'on serait tenté de dire que la première touchera 5^f et la deuxième 3^f. Cette réponse serait inexacte.

La troisième personne payant 8^f, le repas coûte 24^f.

Chaque plat coûte $\frac{24^f}{8}=3^f$.

La première a donné $3^f\times 5=15^f$, il lui revient donc 7^f.

La seconde a donné $3^f\times 3=9^f$, il lui revient 1^f.

Problème des Pandectes. — *Dans un repas pris en commun Caïus apporta 7 plats, Sempronius 8 et Titus qui survint partagea le repas avec les deux autres. Pour payer son écot Titus remit 14 écus à Caïus et 16 à Sempronius. Celui-ci réclame et demande au juge de faire la répartition. Quel est le jugement?*

Soit x le prix d'un plat.

Titus a payé son repas $14+16=30$ écus.

Caïus a donné en trop $7x-30$.

Sempronius $8x-30$.

Et l'on a :

$$7x - 30 + 8x - 30 = 30$$
$$x = 6.$$

Caïus doit toucher 12 écus,
Sempronius 18 écus.

On peut dire aussi : Titus ayant payé son repas 30 écus, le repas complet représente $3 \times 30 = 90$ écus.

Il y a d'autre part 15 plats.

Chaque plat vaut donc 6 écus.

Caïus a donné pour 42 écus : il doit toucher 12 écus.

La répartition des frais. — *Deux jardiniers conviennent de bêcher leurs jardins en commun ; l'un des jardins a une superficie de 8 ares, l'autre de 6. Toutefois, ils s'adjoignent un ouvrier et tout le travail est effectué par les trois hommes qui ont travaillé autant l'un que l'autre. Quand l'ouvrage est terminé, l'ouvrier demande 210 francs, pour son salaire. Combien chaque cultivateur doit-il payer?*

Prix du travail total : $210\text{f.} \times 3 = 630\text{f.}$

Prix » par are : $\dfrac{630}{14} = 45\text{ f.}$

Prix » effectué pour le premier $45\text{f.} \times 8 = 360\text{f.}$
Prix » » second $45\text{f.} \times 6 = 270\text{f.}$
Le premier devra payer $360\text{f.} - 210\text{f.} = 150\text{f.}$
Le second » $270\text{f.} - 210\text{f.} = 60\text{ f.}$

Le bal. — *Dans un bal se trouvent 20 jeunes gens, garçons et filles. Le premier garçon danse avec 5 filles, le second avec 6 filles, le troisième avec 7 filles et ainsi de suite, le dernier danse avec toutes les filles. Combien y a-t-il de garçons et combien de filles?*

Si x est le nombre de garçons, le deuxième danse avec $5 + 1$ filles et le x^e danse avec $5 + x - 1$ filles.

Il y a donc x garçons et $5 + x - 1$ filles. On a donc :

$$x + 5 + x - 1 = 20$$

d'où
$$x = \frac{16}{2} = 8 \text{ garçons.}$$

Il y a 8 garçons et $20 - 8 = 12$ filles.

Un partage difficile. — *Une succession est partagée de la façon suivante entre un certain nombre d'héritiers. Le premier prend* a^f *et la* n^e *partie du reste ; le deuxième prend* $2\,a^f$ *et la* n^e *partie du reste ; le troisième prend* 3 a^f *et la* n^e *partie du reste et ainsi de suite. Dans ces conditions, tous les héritiers se trouvent recevoir des parts égales. Quel est le nombre des héritiers et la part de chacun d'eux?* (CHUQUET.)

Soit x la valeur en francs de l'héritage, y la part de chaque héritier, n le nombre des héritiers. Écrivons que les deux premiers ont des parts égales

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{1}{n}\left[x-\left(a+\frac{x-a}{n}\right)-2a\right].$$

On en déduit $x=a\,(n-1)^2$.

La valeur de l'héritage est, en francs $a\,(n-1)^2$;

La part de chaque héritier est $a+\dfrac{a\,(n-1)^2-a}{x}=a\,(n-1)$;

Le nombre des héritiers est $n-1$.

Le problème du charretier. — *Un charretier assis sur le siège de sa voiture et conduisant celle-ci s'aperçoit qu'une chaîne fixée à l'arrière s'est détachée et traîne à terre. Il descend du siège et, pendant que la voiture continue à avancer d'une façon régulière, il va relever cette chaîne. Pour cela, il fait 8 pas puis, la chaîne relevée, il revient au marchepied d'avant pour remonter sur le siège ; pour effectuer ce trajet, la voiture continuant son mouvement, il fait 24 pas. Calculer la longueur de la voiture, entre le marchepied d'avant et l'arrière, comptée en pas du charretier.*

Pendant que le charretier fait un pas, le cheval avance d'une longueur qui est égale à x pas du charretier, x étant un nombre entier ou fractionnaire.

Quand le charretier va à l'arrière, la vitesse de la voiture et celle du charretier s'ajoutent, en d'autres termes, quand le charretier fait 1 pas, il se rapproche de l'arrière de $(1+x)$ pas et la longueur de la voiture est $(1+x)\,8$.

Quand le charretier revient à l'avant, à chaque pas qu'il fait, il ne se rapproche de l'avant que de $(1-x)$ et l'on peut dire que la longueur de la voiture est $(1-x)\,24$.

On a donc : $(1+x)\,8=(1-x)\,24$ ou $32x=16$

et $$x=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}.$$

Longueur de la voiture : $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)8=12$ pas du charretier.

Problème de Newton. — *75 bœufs ont consommé en 12 jours l'herbe contenue dans un pré de 60 ares et celle qui a poussé pendant ces 12 jours.*

81 bœufs ont consommé en 15 jours l'herbe contenue dans un pré de 72 ares et celle qui a poussé pendant ces 15 jours.

Combien faudra-t-il de bœufs pour consommer en 18 jours l'herbe contenue dans un pré de 96 ares et celle qui pousserait pendant ces 18 jours?

On suppose que l'herbe croît uniformément et que les bœufs mangent également.

Soit m la masse d'herbe qui croît uniformément par jour et par are. On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{75 bœufs consomment en 12 j. la masse d'herbe} \\ \quad \text{de } 60^a \text{ de pré} + 720m (1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{81 bœufs consomment en 15 j. la masse d'herbe} \\ \quad \text{de } 72^a \text{ de pré} + 1\,080m (2) \end{cases}$$

et la question revient à calculer combien de bœufs consommeront en 18 jours la masse d'herbe de $96^a + 1\,728m$.

La relation (1) donne :

75 bœufs consomment en 15 j. la masse d'herbe de $75^a + 900m$ (3)
d'où 1 bœuf consomme en 15 j. — $1^a + 12m$
et 81 bœufs consomment en 15 j. — $81^a + 972m$ (4)

Les relations (2) et (4) donnent :

Masse d'herbe de $81^a + 972m$ = masse d'herbe de $72^a + 1\,080m$ d'où masse d'herbe de 1^a de pré $= 12m$.

Par suite, $108m$ = masse d'herbe de 9^a de pré ; $720m$ = masse d'herbe de 60^a de pré ; et $1\,728m$ = masse d'herbe de 144^a de pré.

La relation (1) devient :

75 bœufs consomment en 12 j. l'herbe de $60 + 60 = 120^a$ de pré ; d'où 75 bœufs consomment en 18 j. l'herbe de

$$\frac{120 \times 18}{12} = 180^a \text{ de pré.}$$

Pour consommer en 18 j. la masse d'herbe de $96^a + 1\,728m$ ou masse d'herbe $96^a + 144^a$, soit de 240^a, il faut

$$\frac{75 \times 240}{180} = 100 \text{ bœufs.}$$

Le tunnel. — *Un observateur, placé devant l'entrée d'un tunnel, voit venir un train. Il tire sa montre. Il est exactement 5 heures quand la tête du train franchit l'entrée. Il est 5 heures et 20 secondes, quand la queue du train disparaît.*

A 5 heures et 6 minutes exactement, cet observateur entend le claquement caractéristique que produit l'air en rentrant dans le tunnel, au moment où la queue du train en sort.

A la même heure exactement, l'observateur sait que la tête du train entre dans une gare située à 125 m. de la sortie du tunnel.

La vitesse du son dans le tunnel étant de 335 m. à la seconde : 1° quelle est la longueur du tunnel ; 2° la vitesse du train ; 3° sa longueur.

A 5 heures la tête du train entre dans le tunnel.

A 5 heures et 20 secondes la queue du train entre dans le tunnel : la longueur du train est donc :

$$l = 20 \times v \quad v \text{ vitesse en m/sec.}$$

A 5 h. et 6 min. l'observateur entend le claquement que produit l'air en rentrant dans le tunnel au moment où la queue du train en sort : la tête du train entre en gare située à 125 m. de la sortie du tunnel. Si x désigne la longueur du tunnel, le chemin parcouru par la tête du train en 6 m. sera $x + 125 = 360\, v$.

Soit t' le temps que met la tête du train à effectuer les 125 m, $t' - 20$ sera le temps que met la queue du train à effectuer les 125 m $- l$; on déduit : $125 - l = (t' - 20)\, v$.

Pendant ce temps $t' - 20$ le son a parcouru la longueur du tunnel à la vitesse de 335 m/sec.

D'où $\quad x = 335\,(t' - 20) \quad$ 1)

D'autre part $\quad x + 125 = 360\, v \quad$ 2)

$v\, t' = 125 \quad$ 3)

1) et 2) donnent :

$$360\, v - 125 = 335\, t' - 6\,700.$$

En y portant $\quad v = \dfrac{125}{t'}$

on trouve

$$335t'^2 - 6\,575t' - 450\,000 = 0$$
$$67t'^2 - 1\,315t' - 9\,000 = 0$$

$$t' = \frac{1\,315 + 2\,035}{2 \times 67} = 25 \text{ sec.}$$

On prend la racine positive de l'équation du 2e degré.

Vitesse du train $v = \frac{125}{t'} = 5$ sec. ou 18 km/h.

Longueur du tunnel $x = 335\,(t' - 20) = 1\,675$ m.

Longueur du train $l = 5 \times 20 = 100$ m.

Le problème des singes.

Des singes s'amusaient. De la troupe bruyante,
Un huitième au carré gambadait dans les bois,
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante?

(L. Rodet, 1878 [1].)

x étant le nombre de singes, on a :

$$x - \frac{x^2}{64} = 12 \quad \text{ou} \quad x^2 - 64x + 768 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives toutes deux acceptables, qui sont 48 et 16.

L'essaim d'abeilles.

— Vois cet essaim de mouches à miel.
De la moitié prends la racine ;
Dans un champ de jasmin, cette troupe butine.
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus un frelon bourdonner :
Attiré par l'odeur pendant la nuit dernière,
Il s'était fait prisonnier.
Dis-moi : quel chiffre atteint la troupe buissonnière?

(L. Rodet, 1878 [2].)

x étant le nombre total d'abeilles, on a :

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{x}{9} - 2.$$

Cette équation rendue rationnelle devient

$$2x^2 - 153x + 648 = 0.$$

Elle n'admet qu'une racine acceptable $x = 72$.

(1) Cet énoncé est la traduction d'une récréation extraite d'un traité d'arithmétique de Bhascara, surnommé Atcharya (le savant), auteur hindou du XII[e] siècle.

(2) Ce problème a la même origine que le précédent.

Le marchand de gibier. — *Un marchand a acheté 100 pièces de gibier (lièvres, perdreaux et alouettes) pour 500 f. Il a payé chaque lièvre 25 f., chaque perdreau 5 f. et chaque alouette 0 f.25. Combien en avait-il de chaque espèce?*

Si l'on appelle x le nombre des lièvres, y le nombre des perdreaux et z le nombre des alouettes, on a :

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 25x + 5y + 0{,}25z = 500. \end{cases}$$

Il nous faut résoudre ce système en nombres entiers. En tirant z de la première équation et en portant sa valeur dans la deuxième, celle-ci devient :

$$24{,}75x + 4{,}75y = 475.$$

On en déduit :

$$y = \frac{475 - 24{,}75x}{4{,}75} = \frac{475}{4{,}75} - \frac{24{,}75x}{4{,}75},$$

ou bien

$$y = 100 - \frac{99x}{19}.$$

y doit être un nombre positif et entier, on ne peut, dans ces conditions, donner à x que la seule valeur 19 et $y = 1$.

Le marchand a donc acheté 19 lièvres, 1 perdreau et 80 alouettes.

Nombres répondant à plusieurs conditions.

I. — *Trouver deux nombres entiers consécutifs tels que leur somme multipliée par leur produit donne comme résultat le nombre* 7 440.

Si n est le plus petit des deux nombres, $n + 1$ est l'autre et on doit avoir :

$$n\,(n + 1)\,(2n + 1) = 7\,440,$$

ou encore

$$n\,(n + 1)\,(2n + 1) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 31.$$

n *ne peut pas être pair*. $n + 1$ et $2n + 1$ seraient impairs et n serait $2^4 = 16$ ce qui ne convient pas.

n *est donc impair*. Dans ces conditions $n + 1$ est pair et $2n + 1$ est aussi impair; on doit donc avoir :

$$n + 1 = 2^4 \text{ ou } n = 15.$$

Les nombres cherchés sont 15 et 16.

Vérification. $15 \times 16 \times 31 = 7\,440$.

— On sait que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'énoncé du problème précédent pourrait donc être modifié comme il suit :

Combien faut-il prendre de nombres entiers consécutifs, à partir de l'unité, pour que la somme de leurs carrés soit égale à 44 640?

II. — *Un nombre de 4 chiffres est un carré parfait et, de plus, ses deux premiers chiffres sont égaux entre eux ainsi que ses deux derniers. Quel est le nombre?*

Soient α le premier chiffre de gauche, β le dernier chiffre de droite. Le nombre est égal à :

$$1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta = 1100\alpha + 11\beta = 11(100\alpha + \beta).$$

Si un nombre est carré parfait ses facteurs premiers ont des exposants pairs donc $100\alpha + \beta$ est divisible par 11. Mais le nombre $100\alpha + \beta$ a trois chiffres, celui du milieu étant zéro; comme il est divisible par 11, c'est que $\alpha + \beta$ est multiple de 11.

Dans ces conditions, α et β étant inférieurs à 11, on a forcément $\alpha + \beta = 11$.

On pourrait résoudre en nombres entiers cette équation et prendre parmi les valeurs de α et β trouvées celles qui conviennent. Il est plus simple d'opérer autrement :

L'égalité donne : $\beta = 11 - \alpha$ et le nombre cherché est égal à

$$11(100\alpha + 11 - \alpha) = 11^2(9\alpha + 1).$$

Dans ces conditions, $9\alpha + 1$ où α est un nombre entier inférieur à 10 doit être carré parfait. Il est facile de voir que ce résultat n'est atteint que pour $\alpha = 7$.

On a donc : $\alpha = 7$ et $\beta = 4$ et le nombre cherché est 7 744.

III. — *Trouver un nombre entier tel qu'en lui ajoutant* 12 *et* 25 *successivement, les deux sommes soient carrés parfaits.*

(Ozanam.)

Si x est le nombre cherché, on doit avoir :

$$\begin{cases} x + 12 = y^2; \\ x + 25 = z^2; \end{cases}$$

y et z étant deux nombres entiers.

En retranchant membre à membre les équations, on a :

$$z^2 - y^2 = 13 \text{ ou } (z + y)(z - y) = 13.$$

Cette équation n'admet pour solution, y et z étant des nombres entiers, que

$$\begin{cases} z + y = 13, \\ z - y = 1; \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} z = 7, \\ y = 6. \end{cases}$$

On en déduit : $x = 24$.

Vérification. $24 + 12 = 36 = 6^2 \qquad 24 + 25 = 49 = 7^2$.

Problème à plusieurs inconnues avec indétermination. — I. — *Trouver un nombre entier qui soit égal à 9 fois le chiffre de ses unités.*

Ce nombre ne possédera que deux chiffres, si a est le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, le nombre sera $10a + b$ et l'on doit avoir :

$$10a + b = 9b \text{ ou } 10a = 8b \text{ ou encore } 5a = 4b.$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que pour $a = 4$ et $b = 5$ puisque a et b sont inférieurs à 10.

Le nombre cherché est 45.

II. — *Trouver un nombre de 2 chiffres qui soit égal à 7 fois la somme de ses chiffres.*

Si a est le chiffre des dizaines du nombre cherché et b le chiffre des unités, on doit avoir :

$$10a + b = 7\,(a + b) \text{ d'où } a = 2b.$$

On pourra évidemment prendre $\begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases} \begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases} \begin{cases} b=3 \\ a=6 \end{cases} \begin{cases} b=4 \\ a=8 \end{cases}$

Les nombres 21, 42, 63, 84 répondent à la question.

Achat de plusieurs objets. — *Une personne a acheté 120 objets pour 120 f., les uns ont coûté chacun 2 f., les autres 3 f. et les derniers 0 f. 50. Combien y a-t-il d'objets de chaque sorte?*

(OZANAM.)

Soit x le nombre d'objets à 2 f.,
» y » 3 f.,
» z » 0 f. 50.

On a évidemment : $\begin{cases} x + y + z = 120, \\ 2x + 3y + 0{,}5z = 120. \end{cases}$

On a un système de 2 équations à 3 inconnues, mais les inconnues sont des nombres entiers.

Tirons la valeur de x de la première équation et portons dans la seconde ; le système devient :

$$\begin{cases} x = 120 - y - z, \\ y = 1{,}5z - 120. \end{cases}$$

La plus petite valeur que l'on puisse donner à z est $z = \frac{120}{1,5} = 80$, on a alors $y = 0$ et $x = 40$.

y devant être entier, on peut prendre $z = 82$, $z = 84$, $z = 86$, $z = 88$, $z = 90$, $z = 92$, $z = 94$, $z = 96$.

Pour une valeur de z supérieure à 96, la première équation ne donne pas de valeur acceptable pour x.

En somme, le problème comporte les solutions suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} z = 80, \\ y = 0, \\ x = 40; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 82, \\ y = 3, \\ x = 35; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 84, \\ y = 6, \\ x = 30; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 86, \\ y = 9, \\ x = 25; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 88, \\ y = 12, \\ x = 20; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} z = 90, \\ y = 15, \\ x = 15; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 92, \\ y = 18, \\ x = 10; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 94, \\ y = 21, \\ x = 5; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} z = 96, \\ y = 24, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Le partage des boisseaux de blé. — *On distribue* 100 *boisseaux de blé entre* 100 *personnes comprenant des hommes, des femmes et des enfants de manière que chaque homme en reçoive* 3, *chaque femme* 2 *et chaque enfant* 1/2 *boisseau. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?*

(ALCUIN.)

Soient x le nombre d'hommes, y le nombre de femmes, z le nombre d'enfants. On doit avoir :

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 100, \\ 3x + 2y + \frac{z}{2} = 100; \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left|\begin{array}{l} x + y + z = 100, \\ 6x + 4y + z = 200. \end{array}\right.$$

En retranchant membre à membre, on a :

$$5x + 3y = 100 \quad \text{ou} \quad 3y = 5\,(20 - x).$$

Les inconnues sont des nombres entiers. Pour résoudre en nombres entiers la dernière équation, il suffit de remarquer que $20 - x$ doit être un multiple de 3, ce qui nous donne 7 solutions. La valeur de z étant tirée d'une des équations précédentes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2, \\ y = 30, \\ z = 68; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 5, \\ y = 25, \\ z = 70; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 8, \\ y = 20, \\ z = 72; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 11, \\ y = 15, \\ z = 74; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 14, \\ y = 10, \\ z = 76; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 17, \\ y = 5, \\ z = 78; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 20, \\ y = 0, \\ z = 80. \end{array}\right.$$

— Alcuin n'a donné, du problème, qu'une seule solution : 11 hommes, 15 femmes et 74 enfants.

Le tube de peinture. — *Un artiste a peint sur sa toile un petit oiseau. Il disposait d'un petit tube de peinture jaune pesant x grammes, d'un tube, de volume égal, de peinture bleue pesant le double de la jaune et enfin d'un tube de peinture rouge pesant à volume égal le double de la bleue. Il a employé le contenu entier d'un tube qui pesait autant de grammes que le produit de x par le carré de x moins la racine carrée de son double, diminué encore de x grammes. De quelle couleur a-t-il peint son oiseau?*

Le tube employé en entier pèse

$$x \times x^2 - \sqrt{2x} - x.$$

Or, ce poids sera x, $2x$ ou $4x$ suivant le tube employé, d'où les 3 hypothèses résumées ainsi :

Jaune $x = x^3 - \sqrt{2x} - x$ ou $x^3 - 2x - \sqrt{2x} = 0$,
Bleu $2x = x^3 - \sqrt{2x} - x$ ou $x^3 - 3x - \sqrt{2x} = 0$,
Rouge $4x = x^3 - \sqrt{2x} - x$ ou $x^3 - 5x - \sqrt{2x} = 0$.

x est un nombre entier de grammes, il faut aussi que $\sqrt{2x}$ soit entier : donc $2x$ doit être un carré parfait.

x devra être 2, 8, 18, etc...,

si on remplace x par 2 dans les 3 équations, on constate que ce nombre est racine de la deuxième seulement.

Les autres solutions ne sont pas possibles.

Donc c'est la couleur *bleue* qui a été employée et le tube pesait 4 g.

Le tapis. — *Un tapis a coûté 640 francs. Sa longueur est double de sa largeur. Le prix du mètre carré est un nombre entier de francs plus petit que le nombre de mètres carrés et composé de 2 chiffres. Quelles sont ses 2 dimensions, sachant qu'elles sont des nombres entiers ?*

Soit a la largeur : la longueur est 2a et la surface $2a^2$.
Or $640 = 2^7 \times 5 = 2 \times 2^6 \times 5 = 2 \times 2^4 \times 20 = 2 \times 2^2 \times 80$.

Les seuls doubles carrés que l'on puisse former avec les facteurs premiers de 640 sont :

$$2 \times 2^6 \quad 2 \times 2^4 \quad 2 \times 2^2.$$

Si la surface était : $2 \times 2^6 = 128$,
le prix du m² serait 5 f., ce qui est contraire aux données.

Si la surface était $2 \times 2^2 = 8$ le prix du mètre carré serait 80. Cette solution n'est pas convenable. Donc la surface est

$$2 \times 2^4 = 32 \text{ m}^2.$$

Les dimensions sont 4 m. et 8 m. Le prix du m² est 20f.

La hauteur de l'escalier. — *La hauteur d'un escalier est comprise entre 3 m. et 4 m. Sans atteindre le haut, on monte la moitié des marches, puis le tiers de ce qui reste, enfin, le huitième du second reste. Chaque marche mesure 0 m. 16 de hauteur. Quelle est la hauteur totale de l'escalier?*

On monte la moitié des marches, il reste $\frac{1}{2}$.

On monte le $\frac{1}{3}$ de ce qui reste soit $\frac{1}{6}$.

Il reste $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

On monte ensuite le $\frac{1}{8}$ de ce qui reste et on n'a pas atteint le haut. Puisqu'on peut monter le $\frac{1}{8}$ du $\frac{1}{3}$ des marches on en conclut donc que le $\frac{1}{3}$ du nombre de marches est divisible par 8.

Le nombre de marches de l'escalier est 24 ou un multiple de 24.

La hauteur de l'escalier étant comprise entre 3 m. et 4 m. ne peut être que

$$0 \text{ m}, 16 \times 24 = 3 \text{ m}, 84.$$

Parc zoologique. — *Un parc zoologique possède des antilopes, des serpents et des rhinocéros. Le nombre des cornes égale la moitié de la différence du nombre de pattes et du nombre de têtes. Il égale aussi le produit du carré du nombre de serpents par le nombre d'antilopes, plus le nombre d'antilopes, moins le produit du nombre de rhinocéros par le nombre d'antilopes, moins la moitié du produit du nombre de serpents par le nombre de rhinocéros.*

Le nombre de cornes multiplié par le nombre de serpents égale deux fois le produit du nombre d'antilopes par le nombre de serpents plus deux fois le produit du nombre d'antilopes par le nombre de rhinocéros. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce?

Soient x, y, z les nombres d'antilopes, de serpents et de rhinocéros. Il y a $2x+z$ cornes, $4x+4z$ pattes et $x+y+z$ têtes. On a :

1) $2x + z = \frac{1}{2}[(4x + 4z) - (x + y + z)]$,

2) $2x + z = xy^2 + x - xz - \frac{1}{2}yz$,

3) $y(2x + z) = 2xy + 2xz$,

qui simplifiées deviennent :

$$1) \quad x + y = z,$$

$$2) \quad \frac{2x(y^2 - 1)}{2(x + 1) + y} = z,$$

$$3) \quad 2x = y$$

et donnent :

$$2x(2x^2 - 3x - 2) = 0.$$

La racine positive seule acceptable est $x = 2$.

Il y a donc
- 2 antilopes,
- 4 serpents,
- 6 rhinocéros.

Le problème des oiseaux. — *Une personne achète des moineaux, des tourterelles et des colombes, en tout, 30 oiseaux pour 30 deniers. 3 moineaux coûtent 2 deniers et 2 tourterelles et une colombe coûtent également 2 deniers. Combien cette personne a-t-elle acheté d'oiseaux de chaque espèce?*

(Léonard DE PISE.)

Appelons x le nombre des moineaux, y le nombre des tourterelles et z le nombre des colombes, on a les relations :

$$\begin{cases} x + y + z = 30, \\ y = 2z, \\ \frac{2x}{3} + \left(\frac{y}{2} + z\right)2 = 30. \end{cases}$$

La relation $y = 2z$ résulte de ce que, d'après l'énoncé, il y a 2 fois plus de tourterelles que de colombes.

La troisième équation qui exprime que les 30 deniers sont la somme des prix des oiseaux de chaque espèce, s'écrit :

$$\frac{2x}{3} + y + 2z = 30.$$

En remplaçant y par $2z$ dans la première et la dernière équations, on est amené à résoudre

$$\begin{cases} x + 3z = 30, \\ 2x + 12z = 90. \end{cases}$$

On en déduit : $x = 15$, $z = 5$ et $y = 10$.

Il y avait 15 moineaux, 10 tourterelles et 5 colombes.

La vente des moutons. — *Trois maquignons A, B, C, vont au marché pour vendre des moutons. Ils en ont respectivement 20, 30 et 40. Au début du marché, les moutons sont tous vendus le même prix. A la fin, ils sont également vendus le même prix mais ce prix n'est pas le même qu'au début ; ces prix sont un nombre entier de francs. Les maquignons, de leurs ventes respectives, ont retiré la même somme. Comment cela se peut-il?*

(*Problème ancien.*)

Le problème a une infinité de solutions.

Soient a, b, c les nombres des moutons vendus respectivement par les maquignons au début du marché, x le prix de chaque mouton. A la fin du marché, ils ont vendu respectivement $20 - a$, $30 - b$, $40 - c$ au prix y pour chaque mouton.

On doit avoir :

$$ax + (20 - a)\,y = bx + (30 - b)\,y = cx + (40 - c)\,y.$$

Il y a là 2 équations et 5 inconnues.

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} (y - x)\,(b - a) = 10y, \\ (y - x)\,(c - b) = 10y. \end{cases}$$

On en déduit : $b - a = c - b$, ou $a + c = 2b$.

Le système devient :

$$\begin{cases} (y - x)\,(b - a) = 10y, \\ a + c = 2b. \end{cases}$$

Il admet, en nombres entiers, une infinité de solutions.

Prenons par exemple, $a = 1$.

$b - a$ doit être au moins égal à 11, car $b - a$ doit être plus grand que 10. Prenons $b = 12$.

On en déduit $c = 23$ et, d'autre part, en remplaçant dans la première équation, on obtient $y = 11x$.

En choisissant pour x un nombre entier quelconque, on obtiendra une solution.

Par exemple $\begin{cases} x = 1 \\ y = 11 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \\ c = 23. \end{cases}$ constitue une solution.

En conservant les mêmes valeurs pour a, b, c on peut multiplier x et y par un même nombre, on obtiendra toujours une solution.

Si l'on prend $a = 2$, b doit être plus grand que 12 car $b - a$ doit être plus grand que 12.

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 13 \\ c = 24 \end{cases}$ avec $\begin{cases} x = 1. \\ \text{constitue une solution.} \\ y = 11 \end{cases}$

On peut, partant de $a = 2$ en trouver encore une infinité.

— Pour se rapprocher des prix ordinaires, on peut prendre :

$\begin{cases} a = 2, \\ b = 17, \\ c = 32, \end{cases}$ on a alors $y = 3x$, on prendra $\begin{cases} x = 100, \\ y = 300. \end{cases}$

On obtient ainsi la solution suivante :

A la première vente, A vendra 2 moutons, B, 17 et C, 32; chaque mouton sera vendu 100 francs.

A la deuxième vente, A vendra 18 moutons, B, 13 et C, 8; chaque mouton étant vendu 300 francs.

Chaque maquignon aura vendu ses moutons 5 600 francs.

Problème de l'insecte. — *Un meuble se compose de 3 casiers verticaux. La largeur intérieure de chaque casier est de 3 cm.; l'épaisseur de chaque bois est de 1 cm. Dans chaque casier, on place verticalement, dos en avant, un livre broché qui épouse toute l'épaisseur du casier. Un insecte qui ronge le bois et le papier s'introduit dans le meuble. Se déplaçant toujours horizontalement dans le même sens, il trouve moyen de percer depuis la première page du premier livre jusqu'à la dernière page du troisième livre. Quel trajet a parcouru l'insecte pour accomplir sa triste besogne?*

Les livres sont placés de telle sorte que la première page du premier livre est appliquée sur la face gauche du bois séparant les deux premières cases; la dernière page du 3e livre est appliquée sur la face droite du bois séparant les 2e et 3e cases. Le trajet horizontal parcouru par l'insecte a donc une longueur de 1 cm. + 3 cm. + 1 cm. = 5 cm.

Le problème de l'escargot. — *Un escargot grimpant le long d'un poteau ayant 12 m. de hauteur parcourt 3 m. pendant la journée mais redescend de 2 m. pendant la nuit. Combien faudra-t-il de jours et de nuits à l'escargot pour arriver au sommet du poteau?*

Ce problème est enfantin. Il est bien évident que l'escargot avance d'un mètre dans une journée et que lorsqu'il aura marché pendant 9 journées complètes il sera à 3 m. du sommet. Il atteindra donc celui-ci à la fin du jour qui suivra. En somme, il lui faudra marcher 10 jours et 9 nuits.

Le problème du tailleur. — *Un tailleur a une pièce de drap de 12 m. de long; tous les jours, il en coupe 2 m. Au bout de combien de jours la pièce sera-t-elle entièrement coupée?*

Il ne faudrait pas répondre au bout de 6 jours, ce serait faux, car le 5e jour il reste, de la pièce, une longueur de 4 m. et il achève de couper la pièce en une seule fois. Il faudra donc 5 jours au tailleur pour couper la pièce.

Cette récréation se rattache aux exercices que l'on propose aux enfants, en arithmétique, relativement aux divisions d'une ligne, aux intervalles, etc.

Lorsqu'on plante des pieux, équidistants ou non, sur une ligne, en plaçant un pieu à chaque extrémité, *le nombre des pieux est égal au nombre des intervalles augmenté de un.*

S'il n'y a pas de pieux aux extrémités, *le nombre des pieux est égal au nombre des intervalles moins un.* Ainsi, sur une échelle, le nombre des échelons est égal au nombre des intervalles moins un.

Si l'on plante des pieux sur le pourtour d'un champ, quelle que soit la forme de celui-ci, *le nombre des pieux est égal au nombre des intervalles.*

Curieuse façon de voyager. — *Deux personnes n'ont qu'une seule bicyclette pour faire un parcours de 20 km. La première part sur la bicyclette à la vitesse de 15 km à l'heure, en même temps que la deuxième part à pied à la vitesse de 4 km. 500 à l'heure. Après un certain trajet, la première personne laisse la bicyclette sur le talus de la route et termine le parcours à pied à la vitesse de 5 km. à l'heure. La deuxième personne trouve la bicyclette et termine avec elle le parcours, à la vitesse de 12 km. à l'heure; les deux personnes arrivent en même temps à destination.*

Calculer la distance du point de départ à l'endroit où la machine a été abandonnée et la durée totale du trajet.

Soit x la distance, exprimée en kilomètres, comprise entre le point de départ et le point où a été abandonnée la machine, on a, puisque les voyageurs partent en même temps et arrivent à destination en même temps :

$$\frac{x}{15}+\frac{20-x}{5}=\frac{x}{4,5}+\frac{20-x}{12}.$$

On en déduit : $x = 8$ km, 571 par défaut.

Durée du trajet $=\frac{8,571}{15}+\frac{11,429}{5}=$ 2 h., 51 m., 25 s. par défaut.

Problème du mégot. — *Un ramasseur de mégots peut faire une cigarette avec 3 mégots. Il a 10 mégots. Combien fumera-t-il de cigarettes.*

Avec ses 10 mégots, il fait 3 cigarettes et il lui reste 1 mégot.

Il fume 3 cigarettes : il a donc 4 mégots avec lesquels il fait une 4e cigarette qu'il fume, il a alors 2 mégots. Il emprunte 1 mégot à un ami, fait 1 cigarette, la fume et rend le mégot emprunté.

Il a donc fumé 5 cigarettes.

Le hibou. — *Déterminer le nom d'un oiseau sachant que ce nom est composé de 5 lettres et que si l'on attribue à chacune d'elles une valeur numérique égale au rang qu'elle occupe dans l'alphabet, on trouve que :*

La somme des 2 premières est égale à 17 ;

La somme de la 3e et de la 4e est égale à 17 ;

L'excès de la somme des deux dernières sur la somme des trois premières est égal à 17.

Le produit de la seconde par son complément à 17 est égal aux $\frac{12}{5}$ du produit de la troisième par son complément à 17.

Soient a, b, c, d, e les valeurs numériques des 5 lettres du mot cherché : on a les équations :

1) $$a+b=17,$$
2) $$c+d=17,$$
3) $$d+e-(a+b+c)=17,$$
4) $$b\,(17-b)=\frac{12}{5}\,c\,(17-c).$$

a, b, c, d, e doivent être entiers, positifs et inférieurs à 26.

l'égalité 3 peut s'écrire :

$$d + e - (17 + c) = 17,$$
$$17 - c + e - (17 + c) = 17.$$
$$e = 17 + 2c$$

$b\,(17 - b)$ étant un entier, $c\,(17 - c)$ doit être divisible par 5 : ce qui donne pour c les valeurs 5, 10, 15, 2, 7, 12 mais e étant entier positif et < 26 la seule valeur possible pour c est 2 d'où $d = 15$ $e = 21$.

L'équation 4 donne :

$$b = 8 \text{ d'où } a = 9$$
$$b = 9 \qquad a = 8.$$

On a donc les solutions

IHBOU,

et HIBOU,

la 2e est seule à retenir comme nom d'oiseau.

Solution rapide et approchée.

La somme des deux premières lettres et des 3e et 4e étant 17 ces lettres sont évidemment comprises entre a et p et à équidistance des extrémités ; on a donc :

1er groupe	2e groupe
a p	*b o*
c n	*d m*
e l	*f k*
g j	*h i*

Après avoir éliminé les groupes de 2 consonnes il reste *ap bo el hi* qui convenablement assemblés ne donnent que le son hibo acceptable en français. Le mot est *hibou*, ce mot satisfaisant d'ailleurs aux autres données du problème.

Les trois joueurs. — *Trois joueurs conviennent que le perdant de chaque partie doublera l'avoir de chacun des deux autres. Ils jouent 3 parties et perdent chacun une partie. A la fin, ils se trouvent posséder chacun 16 f. Combien chacun possédait-il en se mettant au jeu* (1)?

(Nicolas Chuquet.)

Supposons que le joueur A perd la première partie, le joueur

(1) Le problème est présenté sous cette forme dans le *Triparty*, nous avons simplement changé la donnée.

B la seconde, le joueur C la troisième. Ce dernier a donné, à la fin, à A et B autant de francs qu'ils en possédaient déjà; donc, après la seconde partie, A possédait 8 f., B possédait 8 f. et C, 32 f.

B a perdu la seconde partie, donc, à la fin de la première, A possédait 4 f., B, possédait 28 f et C, 16 f.

Enfin, A ayant perdu la première partie, au début A possédait 26 f., B possédait 14 f. et C, 8 f.

Les trois homonymes. — *Dans un train, il y a un chauffeur, un mécanicien et un garde qui s'appellent Smith, John et Robinson, sans qu'on sache à qui appartient chacun de ces noms.*

Il y a également 3 voyageurs, M. Smith, M. John et M. Robinson.

M. Robinson habite Leeds.

Le garde habite à mi-chemin de Leeds et de Sheffield.

M. John gagne par an 100 livres 20 shillings et 1 penny.

Un voyageur qui est le plus proche voisin du garde gagne 3 fois plus que le garde.

L'homonyme du garde habite Sheffield et Smith bat le chauffeur au billard.

Comment s'appelle le mécanicien?

(*Sphinx.*)

Le voyageur qui est le plus proche voisin du garde n'est ni M. Robinson, ni l'homonyme du garde. D'autre part il ne s'appelle pas M. John car John gagne 100 l. 20 sh. 1 p., non divisible par 3. John ne peut pas gagner 3 fois plus que le garde.

Le voyageur en question est Smith.

L'homonyme du garde est M. John et le garde s'appelle John.

Smith battant le chauffeur au billard, le chauffeur s'appelle Robinson et *le mécanicien se nomme Smith.*

La pertuisane. — *Au cours de la guerre* 1914-1918 *fut découverte la tombe d'un soldat français mort jadis, le dernier jour d'un mois au cours d'une guerre étrangère. La date du décès était gravée sur la pierre tombale. Diverses armes de l'époque, dont une pertuisane, furent retrouvées en cet endroit. Un fanatique du calcul s'amusa à faire le produit du nombre de jours du mois inscrit sur la pierre tombale par la longueur en pieds de la pertuisane, puis par la moitié du nombre entier d'années écoulées depuis le décès du soldat, jusqu'à la découverte de sa tombe, enfin par la moitié du nombre des années qu'avait le commandant de l'ex-

pédition française à l'époque où le soldat trouva la mort. Ce produit de 4 facteurs est 451 066.

Quel est le nom de celui qui commandait l'expédition où est mort le soldat?

Le nombre 451 066 n'étant pas un nombre premier il est le produit des facteurs premiers suivants :

7 29 2 11 101,

Le seul facteur susceptible d'indiquer le nombre de jours du mois est le chiffre 29.

La pertuisane ne saurait de même avoir pour longueur un chiffre autre que 7 pieds.

Restent pour situer l'année de l'expédition et celle de la naissance du commandant de celle-ci, les 3 facteurs

2 11 101

2 solutions se présentent : ou 101 représente la moitié de la durée depuis le décès du soldat, c'est-à-dire depuis la bataille, ce qui porterait la date de celle-ci en 1712 ou 1716 et l'âge du commandant à 44 ans; ou 202 représente cette moitié, ce qui porte la date de l'événement à 1512 et l'âge du commandant à 22 ans. Celui-ci serait donc né en 1489 ou 1490. L'année de la mort du soldat est bissextile en raison du nombre 29. Les années 1712 et 1716 ne fournirent pas d'expédition en terre étrangère : et à cette date la pertuisane n'était plus en usage. Par contre nous trouvons la bataille de Ravenne en 1512 avec, à la tête des troupes françaises, *Gaston de Foix*, né en 1489.

Problèmes sur les montres et les heures.

La montre qui retarde. — *Une montre retarde d'un quart de minute pendant le jour mais, par suite du changement de température, elle avance de un tiers de minute pendant la nuit. Au bout de combien de jours aura-t-elle avancé de 2 minutes, sachant qu'aujourd'hui, au soir, elle donnait l'heure exacte?*

Dans une journée complète, la montre avance de

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \text{ de minute.}$$

On serait tenté de dire : il lui faudra $2 : \frac{1}{12} = 24$ jours.

En réalité, au bout de 20 jours, au soir, la montre a avancé de $\frac{20}{12}$ ou $\frac{5}{3}$ de minutes et comme elle avance pendant la nuit de $\frac{1}{3}$ minute, au matin son avance est de

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3} \text{ ou 2 minutes.}$$

La montre mettra donc 20 jours plus la durée d'une nuit.

Les problèmes sur la montre. — I. — *Les deux aiguilles d'une montre sont sur midi. A quels moments entre midi et minuit seront-elles de nouveau en coïncidence?*

A 1 h., la petite aiguille marquera 1 et la grande 12.

La grande aiguille va 12 fois plus vite que la petite.

Pendant que la grande aiguille parcourt 12 divisions, la petite en parcourt une.

Si la grande aiguille avait 11 divisions à rattraper sur la petite, elle mettrait 1 heure.

Pour rattraper une division elle met $\frac{1}{11}$ d'heure.

La première rencontre se fera donc à 1 h. $\frac{1}{11}$.

Les deux aiguilles se trouvent, à cette époque, de nouveau en coïncidence; la nouvelle coïncidence se fera évidemment 1 h. $\frac{1}{11}$ après la précédente et ainsi de suite.

En somme, les coïncidences auront lieu à

$$1 \text{ h. } \frac{1}{11},\ 2 \text{ h. } \frac{2}{11},\ 3 \text{ h. } \frac{3}{11},\ 4 \text{ h. } \frac{4}{11},\ 5 \text{ h. } \frac{5}{11},\ 6 \text{ h. } \frac{6}{11},\ 7 \text{ h. } \frac{7}{11},\ 8 \text{ h. } \frac{8}{11},$$

$$9 \text{ h. } \frac{9}{11},\ 10 \text{ h. } \frac{10}{11} \text{ et } 11 \text{ h. } \frac{11}{11} \text{ ou midi.}$$

Il y aura 11 coïncidences.

— Un autre raisonnement conduit au même résultat :

La grande aiguille met 1 h. pour revenir au point de départ.

Pendant ce temps la petite aiguille a avancé de 1 division.

Pour parcourir 1 division, la grande aiguille met $\frac{1}{12}$ d'heure.

Pendant ce temps la petite aiguille a avancé de $\frac{1}{12}$ de division.

Pour parcourir $\frac{1}{12}$ de division, la grande aiguille met $\frac{1}{12^2}$ d'heure.

Pendant ce temps la petite aiguille a avancé de $\frac{1}{12^2}$ de division, et ainsi de suite.

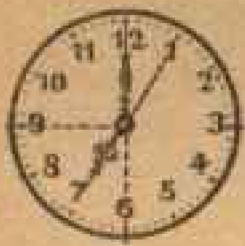
Le temps mis par la grande aiguille pour coïncider avec la petite est donc :

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \dots\dots$$

On a là une progression géométrique illimitée de raison $\frac{1}{12}$, raison plus petite que 1. On sait que la somme des termes est :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11} \text{ ou } 1 \text{ h.} \frac{1}{11}.$$

— *Rapprocher cette solution de celle donnée au problème d' « Achille et la Tortue »* (V. page 132).



II. — *Les aiguilles d'une montre marquent 7 heures. A quelle heure se trouveront-elles en coïncidence?*

Nous pouvons dire que la grande aiguille est en retard de 7 divisions sur la petite.

La grande aiguille rattrape une division en $\frac{1}{11}$ d'heure; pour rattraper 7 divisions elle mettra $\frac{7}{11}$ d'heure.

Les aiguilles coïncideront à 7 h. $\frac{7}{11}$ ou 7 h. 38 m. 10 s. $\frac{10}{11}$.

III. — *Les deux aiguilles d'une montre marquent 7 heures. A quelle heure seront-elles dans le prolongement l'une de l'autre?*

La grande aiguille devra rattraper une division sur la petite; elles seront dans le prolongement l'une de l'autre à 7 h. $\frac{1}{11}$.

IV. — *A quelles heures, à partir de 12 heures, les deux aiguilles d'une montre formeront-elles un angle de 30°?*

La grande aiguille parcourt 360° en 1 heure.
La petite » 30° »

Désignons par x secondes, la première fois que les aiguilles, après 12 heures, formeront un angle de 30°; on aura :

$$\frac{360x}{60 \times 60} - \frac{30x}{60 \times 60} = 30 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{10} - \frac{x}{120} = 30.$$

On en déduit $x = \frac{360}{11}$ ou en minutes $\frac{60}{11}$ soit 5 m. $\frac{5}{11}$.

— La grande aiguille fait le tour du cadran et revient faire un angle de 30° à une heure x telle que l'on ait :

$$\frac{360x}{60 \times 60} - \frac{30\,x}{60 \times 60} = 30 + k\,360$$

$x = \frac{360}{11} + k\,\frac{360 \times 12}{11}$ secondes où k peut être remplacé par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

En heures, on trouve : $x = \frac{1}{11} + k\,\frac{12}{11}$.

c'est-à-dire : $1^h\ 10^m\,\frac{10}{11}$ $2^h\ 16^m\,\frac{4}{11}$ $3^h\ 21^m\,\frac{9}{11}$, etc.

Heures équivoques. — *Une personne regarde sa montre entre 3 h. et 4 h., puis entre 6 h. et 7 h. Chacune des deux aiguilles ayant pris la place de l'autre, quelle heure était-il exactement à chacune des observations de la montre?*

En prenant $\frac{1}{12}$ de la circonférence pour unité et en appelant x et y les fractions d'heure qu'il faut respectivement ajouter à 3 h. et 6 h., le problème conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} 3 + x = 12y, \\ 6 + y = 12x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{9}{11}, \\ x - y = \dfrac{3}{13}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 31^{\,m}\ 28^{\,s} + \dfrac{16^{s}}{143}, \\ y = 18^{\,m}\ 20^{\,s} + \dfrac{74^{s}}{143}. \end{cases}$$

Il était donc d'abord 3 h. 31 m. 28 s., puis 6 h. 18 m. 20 s.
Ces heures sont les deux seules où avec deux aiguilles égales, on ne pourrait dire si l'heure exacte est l'une ou l'autre.

A quelle heure vous levez-vous? — On suppose que l'heure du lever est un nombre entier.

Première méthode. — Présentez une montre à la personne à qui vous voulez indiquer l'heure de son lever et priez-la de tourner les aiguilles de façon à marquer une heure quelconque (cette heure étant représentée par un nombre entier). Ajoutez mentalement 12 à l'heure indiquée et dites à la personne de compter les heures une à une jusqu'à la somme que vous avez obtenue, en prenant pour point de départ l'heure qu'elle a marquée, en se déplaçant en sens inverse du mouvement, et en commençant à compter à partir du chiffre indiquant l'heure à laquelle elle désire se lever. La division sur laquelle elle s'arrêtera est forcément l'heure à laquelle elle désire se lever.

(Bachet, sieur de Meziriac.)

Exemple : La personne désire se lever à 8 h. et elle a marqué 6 sur le cadran.

Elle comptera $6 + 12 = 18$ à partir du point marqué 6, en commençant par 8, dans le sens inverse du mouvement des aiguilles. Elle s'arrêtera sur 8 h.

Explication : Si elle comptait 18 en commençant par 6, elle retrouverait évidemment le point de départ. En commençant par 8, elle s'arrêtera 2 divisions avant d'arriver au point 6, c'est-à-dire au point 8.

Deuxième méthode. — Bachet de Meziriac effectue cette récréation avec 12 cartes disposées en rond, marquées de numéros allant de 1 à 12 et disposées de façon à avoir des nombres consécutifs. Il montre, comme nous venons de le faire, comment on peut deviner un nombre pensé.

Problème sur l'âge.

Deviner l'âge d'une personne. — Vous pouvez, par exemple, *calculer simplement la différence entre l'âge de la personne et le vôtre.*

— Si la personne est plus âgée que vous.
Retranchez votre âge de 99.

Dites à la personne d'ajouter à son âge le nombre que vous obtenez ainsi. Le nombre qu'elle trouve est évidemment supérieur à 100. Faites retirer de la somme obtenue le chiffre des centaines et faites-le ajouter au chiffre des unités; la somme obtenue est égale à la différence des deux âges. Si vous la connaissez, en l'ajoutant à votre âge vous aurez celui de la personne.

Exemple : Vous avez 18 ans et la personne 42.

Vous retranchez mentalement 18 de 99, il reste 81.

Vous faites ajouter 81 à 42 ce qui donne 123.

Vous enlevez 1 et le faites ajouter à 23 ce qui donne 24, différence des âges.

— Si la personne est plus jeune que vous.

Vous opérerez comme précédemment et au nombre que vous donnera la personne vous ajouterez un nombre fictif pour trouver un résultat supérieur à 100. Vous retrancherez du résultat final obtenu le nombre fictif.

Le résultat obtenu s'explique facilement.

Si A est votre âge, B l'âge de la personne supposée plus âgée que A vous formez 99 — A et, en ajoutant ce nombre à B, la personne forme le nombre B + 99 — A.

De ce nombre vous faites retirer 100 et ajouter 1, vous faites donc retirer 99 et il reste B — A.

Cette méthode peut être appliquée pour trouver un nombre quelconque que quelqu'un aura pensé. Ce nombre étant compris, par exemple, entre 20 et 100.

On prendra un nombre quelconque supérieur à 20 et on appliquera la méthode indiquée.

Trouver l'âge d'une personne et le mois de sa naissance. — Numérotons les mois à partir de janvier pour lequel on comptera 1. Si l'on écrit le numéro du mois de la naissance puis, à la suite, l'âge, on forme un nombre de 3 ou 4 chiffres et le problème revient à déterminer un nombre de 3 chiffres. (V. page 24.)

Solution : Faire multiplier le numéro du mois par 2, au résultat ajouter 5, multiplier le nouveau résultat par 50. Au produit obtenu ajouter l'âge puis, de la somme, retrancher 365. Demander le résultat obtenu et lui ajouter mentalement 115. On obtient ainsi un nombre de 3 ou 4 chiffres, le chiffre des mille et des centaines est le numéro du mois de la naissance, les deux autres forment le nombre qui constitue l'âge.

Exemple : Une personne est née dans le mois de juillet et a 36 ans.

Les opérations qu'elle doit exécuter donnent :

$$(7 \times 2 + 5)\,50 + 36 - 365 = 621.$$

La personne vous donne le nombre 621 auquel mentalement vous ajoutez 115, vous obtenez 736.

La personne a 36 ans et elle est née le 7e mois.

Explication. Soit x le numéro du mois de naissance, y l'âge; les opérations donnent :

$$(2x + 5)\,50 + y - 365 = 621$$

ou

$$100x + y = 736.$$

Équation vérifiée pour $x = 7$, $y = 36$.

Déterminer le quantième du mois, le mois et l'année de la naissance de quelqu'un. — Demandez à la personne d'effectuer les opérations suivantes :

1° Inscrire le quantième du mois de la naissance, le doubler, ajouter 11 et multiplier le résultat par 50;

2° Au résultat obtenu, ajouter le numéro du mois, puis doubler, ajouter 11 au produit (13 si la naissance est antérieure à 1900); multiplier le résultat par 50;

3° Retrancher du résultat l'âge atteint ou qui doit l'être pendant l'année courante, puis ajouter 36 si l'on opère en l'an 1931 (si l'année est autre, on ajoutera le nombre formé par les deux derniers chiffres de droite de l'année courante, augmenté de 5);

4° On demandera le résultat obtenu et, de ce résultat, on retranchera 55 555.

Le nombre obtenu sera partagé en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

La première tranche à partir de la gauche donne le quantième du mois.

La seconde tranche donne le numéro du mois.

La dernière donne les deux derniers chiffres de droite de l'année de la naissance.

Exemple : Une personne est née le 12 avril 1892.

Les opérations successivement indiquées donnent :

1° $(24 + 11)\,50 = 1\,750;$

2° $(1\,754 \times 2 + 13)\,50 = 176\,050;$

3° $176\,050 - 39 + 36 = 176\,047;$

4° $176\,047 - 55\,555 = 12\;04\;92.$

Explication. Désignons par q le quantième du mois de la naissance, par n le numéro du mois et par a l'âge de la personne.

Les opérations indiquées donnent :

1° $(2q + 11)\,50 = 100q + 550$;

2° $[(100q + 550 + n)2 + 13]50 = 10\,000q + 100n + 55\,650$;

3° $10\,000q + 100n + 55\,650 - a + 36 = 10\,000q + 100n + 55\,686 - a$;

4° $10\,000q + 100n + 55\,686 - a - 55\,555 = 10\,000q + 100n + 131 - a$.

Dans la somme partagée en tranches de deux chiffres à partir de la droite, q sera évidemment égal à la tranche de gauche, n à la tranche du milieu et $131 - a$, tranche de droite, représentera bien les deux chiffres de droite de l'année de la naissance en 1931. (V. *les Nombres devinés*, p. 24.)

— Il existe d'autres méthodes analogues pour résoudre le même problème.

Pour quelqu'un né postérieurement à 1900 et dont on veut déterminer l'âge en 1933 par exemple, demandez à la personne le résultat final d'opérations que vous dirigez ainsi :

Retranchez du nombre 30 le millésime de votre date de naissance en considérant seulement les deux derniers chiffres; écrivez deux zéros à la droite du résultat; divisez par 2; additionnez le nombre qui indique le jour du mois de votre naissance; écrivez deux zéros à la droite du résultat; divisez par 4; additionnez le nombre qui indique le rang du mois de votre naissance et multipliez le résultat par 8.

Ayant décomposé le produit en tranches de 2 chiffres à partir de la droite, la tranche de gauche augmentée de 3 donne l'âge en 1933, le quantième du mois est fourni par la moitié de la tranche du milieu et le numéro du mois par la tranche de droite divisée par 8. (*Algèbre de Laisant et Perrin.*)

Quel est votre âge ? — *Ce problème revient à trouver un nombre de deux chiffres que quelqu'un a pensé, la solution est la même.* (V. page 25.)

Prenez le chiffre des dizaines de l'année de votre naissance, multipliez-le par 5;

Ajoutez 2 au produit et multipliez le résultat par 2;

Au résultat trouvé ajoutez le chiffre des unités de l'année de votre naissance;

Retranchez le résultat de 135 si vous êtes né avant 1900 et vous aurez votre âge en 1931.

(Pour obtenir l'âge de la personne en 1932, on retrancherait de 136 et ainsi de suite.)

Si la personne est née après 1900, retrancher de 35 au lieu de 135.

Si a est le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités du nombre qui donne l'année de la naissance, les opérations indiquées donnent :

$$5a,\ 5a + 2,\ (5a + 2)\,2 = 10a + 4,\ 10a + 4 + b,$$
$$135 - 10a - 4 - b = 131 - (10a + b).$$

Si la personne est née avant 1900, on obtiendra son âge.

Si la personne est née après 1900, il faudrait évidemment retrancher le résultat de 35 au lieu de 135.

Madame X donne les âges des membres de sa famille. — *Madame X donne les indications suivantes :*

Il existe un certain nombre de 6 chiffres tel que si vous le divisez en tranches de deux chiffres :

La première tranche à gauche vous donne l'âge de ma mère, dont le chiffre des unités est 1.

La dernière à droite, celui de mon père.

Si l'on diminue de 1 an l'âge de mon père, on obtient 3 fois l'âge de mon garçon.

Si l'on divise l'âge de ma mère par le chiffre des unités de l'âge de mon père, on trouve l'âge de ma fille (dont le chiffre des unités est 4) et il reste 1.

On trouve également l'âge de ma fille en déduisant l'âge de ma mère de celui de mon père.

Pour connaître le mien, divisez le nombre par le produit de la somme de l'âge de mon père et de ma fille multiplié par la somme de nos personnes (5) et additionnez ensemble tous les chiffres (pris en valeur absolue) du dividende, du diviseur et du quotient. La somme de tous nos âges est 255.

A l'inspection de ce nombre, vous lirez l'âge de chacun de nous.

Les deux premiers chiffres de gauche donnent l'âge de ma mère.

Le 2e et le 3e chiffre de gauche donnent celui de ma fille.

Le 4e et le 5e chiffre de gauche celui de mon garçon.

Le 5e et le 6e (dernier) celui de mon père.

Et le mien se lit sur les deux extrémités en plaçant le chiffre de droite le premier et celui de gauche le deuxième **(1).**

(A. ARNAUD.)

Si l'on désigne par a, b, c, d, e, f les chiffres du nombre cherché, ces chiffres représentent successivement les unités des différents ordres du nombre pris dans le sens décroissant. Le nombre se présentera sous la forme $a\,b\,c\,d\,e\,f$.

On a, d'après l'énoncé :

Age de ma mère $= 10a + b$ et $b = 1$ donc $10a + 1$.

Age de ma fille $= 10 + c$ et $c = 4$ donc 14 ans.

Age de mon père $= 10e + f$.

Age de mon garçon $= 10d + e$.

D'autre part, d'après l'indication sur l'âge de la mère et de la fille, on a :

$$10a + 1 = 14f + 1 \text{ ou } 5a = 7f.$$

Dans cette égalité, 5 divise $5a$ donc divise également $7f$ et comme il est premier avec 7, il divise f. Dans ces conditions, ou bien $f = 0$ ce qui est impossible car on aurait aussi $a = 0$, ou bien $f = 5$.

On a donc forcément $f = 5$ et $a = 7$.

L'âge de M^me^ X est donc 57 ans.

Le nombre cherché peut déjà s'écrire $714\,d\,e\,5$.

L'âge de mon père est $14 + 71 = 85$ ans, donc $e = 8$.

Age de mon garçon $= \dfrac{85 - 1}{3} = 28$ ans, donc $d = 2$.

Le nombre cherché est 714 285.

En résumé, ma mère a 71 ans; ma fille 14 ans; mon garçon, 28 ans, mon père 85 ans et moi 57 ans.

Il y a évidemment dans l'énoncé du problème des données inutiles, elles peuvent être utilisées pour vérification : si l'on effectue la division indiquée, le dividende est 714 285, le diviseur 495, le quotient 1 443 ce qui donne : $27 + 18 + 12 = 57$ ans.

D'autre part : $71 + 14 + 28 + 85 + 57 = 255$.

---

(1) Problème proposé dans *la Nature* (15 février 1931).

Problèmes sur la famille et la parenté.

Une famille nombreuse composée d'un petit nombre de personnes. — *Il y a dans cette famille un grand-père, une grand-mère, un beau-père, une belle-mère, un gendre, trois filles, quatre fils, deux pères, deux mères, trois petits-fils, deux petites-filles, quatre frères, trois sœurs, deux beaux-frères, deux maris, deux épouses, un oncle, trois neveux et deux nièces. En tout* 40 *personnes? Non,* 10 *seulement! On demande la composition de la famille.*

(*Le Sphinx.*)

Voici le tableau généalogique de cette famille :

Jean — Jeanne

Paul   Marie — Pierre

Jacques, Maurice, Louis, Madeleine, Simone

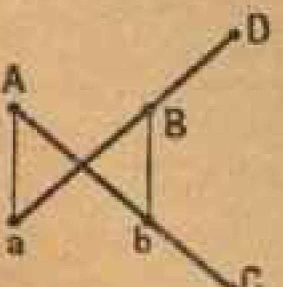
Les sœurs qui ne sont pas parentes. — *Deux femmes peuvent-elles avoir la même sœur et ne pas être parentes?*

Un homme A épouse une femme B et ils ont une fille C.

A et B divorcent ; A se remarie et, de cette union naît une fille D; B se remarie également et, de cette union, naît une fille E. Les deux filles D et E ont pour sœur C, la première par son père, la seconde par sa mère et elles n'ont, entre elles, aucune parenté.

— On peut évidemment varier l'énoncé : prendre 2 hommes qui ont la même sœur ou le même frère, etc.

Oncles et neveux. — *Deux hommes peuvent-ils être à la fois oncle et neveu l'un de l'autre?* (W. Rouse-Ball.)



A et B sont deux veufs qui ont chacun une fille. Soient a la fille de A, b la fille de B.

A épouse b et de cette union naît un fils C.

B épouse a et de cette union naît un fils D.

Voyons quelle est la parenté de C et de D.

C est fils de A, donc frère de a et par suite oncle de D. Mais il est aussi fils de b et comme b a pour frère D, C est encore le neveu de D.

— On pourra résoudre la même question en prenant deux femmes ou un homme et une femme.

Une parenté compliquée. — *Ilz sont deux femmes ayant chacune un beau filz entre leurs bras. Auxquelles fut demandé : « De qui sont ces beaulx filz que vous portez? » Et elles respondirent véritablement : « Ils sont filz de nos filz et frères de nos maryz et tout en loyal mariage. »* (CHUQUET.)

Jadiz ces deux fêmes, qui en riens ne se apparentaient, furent mariées et chascune eust ung filz. Et au chef d'un temps leurs maryz furent trépassez et leurs effants grans. Puis prindrent a mary l'effant l'une de l'aultre. Desquels elles eurent les deux filz dessus dits qui filz étaient de leurs filz et frères de leurs marys.

Parenté déterminée à la suite de la résolution d'un problème d'arithmétique. — *Chez un libraire, deux hommes, Louis et Pierre, accompagnés de leurs fils, Jacques et André, achètent des livres.*

Chaque livre coûte un nombre de francs égal au nombre de livres achetés. Chaque père dépense 15 fr. de plus que son fils et Jacques achète 3 livres de plus que Louis.

Quel est le père d'André?

Soit x un nombre désignant le nombre de livres achetés par l'un des pères; x exprime aussi le nombre de francs que coûte un livre.

y étant un nombre désignant le nombre de livres achetés par le fils, on a :

$$x^2 - y^2 = 15.$$

x et y doivent être des nombres entiers. Dans ces conditions, l'équation n'a que deux solutions :

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8, \\ y = 7. \end{cases}$$

D'autre part, Jacques achète 3 livres de plus que Louis; Jacques a donc acheté 7 livres et Louis en a acheté 4; et par suite, Pierre a acheté 8 livres et André en a acheté 1.

En somme, André est le fils de Louis et Jacques le fils de Pierre.

Les trois frères. — *Trois frères, Jean, Paul et Jacques, vont à la foire avec leurs femmes, Marie, Yvonne, Madeleine.*

Chacune de ces 6 personnes achète un certain nombre d'objets : elle paie chaque objet un nombre de francs égal au nombre d'objets qu'elle a achetés. Chaque mari dépense 63 francs de plus que sa femme.

Paul a acheté 23 objets de plus que Marie.

Jean a acheté 11 objets de plus qu'Yvonne.

On demande quelle est la femme de Paul, celle de Jean et celle de Jacques. (BACHET.)

Soit x le nombre d'objets achetés par Marie.
Soit y » Yvonne.
Soit z » Madeleine.

Marie a acheté x objets à x francs : elle a dépensé x^2 francs et son mari $x^2 + 63$.

De même Yvonne a dépensé y^2 francs et son mari $y^2 + 63$ et le mari de Madeleine $z^2 + 63$. Chaque mari ayant acheté un nombre d'objets égal à la racine carrée de ce qu'il a dépensé

$x^2 + 63$, $y^2 + 63$, $z^2 + 63$ sont des carrés parfaits.

Il faut chercher les solutions *entières* de

$$n^2 + 63 = m^2$$

$$(m - n)(m + n) = 63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9.$$

On a les 3 solutions :

1° $\begin{cases} m - n = 1, \\ m + n = 63, \end{cases}$ $\quad m = 32, \; n = 31;$

2° $\begin{cases} m - n = 3, \\ m + n = 21, \end{cases}$ $\quad m = 12, \; n = 9;$

3° $\begin{cases} m - n = 7, \\ m + n = 9, \end{cases}$ $\quad m = 8, \; n = 1.$

Par conséquent comme les maris ont acheté chacun plus que leur femme

1 femme a acheté 1 objet, son mari 8,
» 9 objets, » 12,
» 31 » » 32.

Paul ayant acheté 23 objets de plus que Marie, Paul a acheté 32 objets et Marie 9.

Jean a acheté 11 objets de plus qu'Yvonne. Jean a acheté 12 objets et Yvonne 1.

On peut donc maintenant déterminer ainsi les couples d'époux :

Yvonne	1 objet,	Jacques	8 objets,
Marie	9 objets,	Jean	12 »
Madeleine	31 »	Paul	32 »

Problèmes sur les progressions.

Le nénuphar. — *Un nénuphar, qui double de taille tous les jours, met un mois pour recouvrir la surface d'un étang. Combien mettraient de jours 2 nénuphars?*

Le deuxième jour le premier nénuphar a doublé de taille. Tout se passe alors comme s'il y avait 2 nénuphars. Deux nénuphars mettent donc 1 mois moins 1 jour pour recouvrir la surface de l'étang.

Les grains de blé et le jeu d'échecs. — *Un auteur arabe,* Al-Sephadi, *raconte que Sessa ayant inventé le jeu d'échecs fut présenté à son maître, roi de Perse. Pour le récompenser, celui-ci promit de lui accorder ce qu'il désirerait. Le mathématicien demanda qu'il lui fût donné un grain de blé pour la première case du jeu,* 2 *pour la seconde,* 4 *pour la troisième,* 8 *pour la quatrième et ainsi de suite jusqu'à la dernière case* (*on sait que le jeu d'échecs en renferme* 64). *Le prince s'indigna d'une demande qu'il jugeait indigne de sa libéralité et fut bien étonné lorsqu'il apprit qu'il lui serait impossible de la satisfaire.*

(OZANAM.)

La somme des grains de blé est en effet :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots\ldots$$

somme des termes d'une progression géométrique de raison 2 et renfermant 64 termes. Elle est égale à

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

En estimant à 20 millions le nombre de grains de blé contenus dans un mètre cube, cette masse de blé correspondrait à

922 337 203 685 m³ de blé.

La terre entière ensemencée en blé ne pourrait produire cette masse en une année.

Une récompense coûteuse. — *Pour récompenser son fils, un père lui demande ce qui pourrait lui faire plaisir. « Nous sommes au premier jour du mois, lui répond le fils, donne-moi*

1 *centime pour ce premier jour,* 2 *pour le deuxième,* 4 *pour le troisième,* 8 *pour le jour suivant et ainsi de suite jusqu'à la fin du mois.* » *Le père promit aussitôt. Ne s'est-il pas engagé à la légère?*

La somme en centimes qu'il doit donner à son fils correspond à la somme des termes d'une progression géométrique

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots$$

de raison 2.

Au bout de 15 jours, le père devra donner $2^{15} - 1$ soit 327 f., 67 et, à la fin du mois supposé de 30 jours $2^{30} - 1$ soit

10 737 418 f., 24.

— On propose de nombreux problèmes basés également sur la somme des nombres d'une progression géométrique.

Citons, entre autres, le problème du maquignon qui propose de vendre son cheval aux conditions suivantes : *Un centime pour le premier clou de ses fers,* 2 *pour le second,* 4 *pour le troisième,* 8 *pour le quatrième et ainsi de suite. Le cheval a* 6 *clous pour chaque fer.*

La somme demandée est, en centimes,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots\ldots + 2^{23}.$$

Cette somme est $2^{24} - 1 = 16\,777\,215$ centimes, soit

167 772 f., 15.

— L'énoncé de ce problème dans l'arithmétique mise en vers par Chavignaud est le suivant :

Un maquignon consent à vendre son cheval
Suivant un marché fait qui semble original.
Il ne veut qu'un centime, en suivant son système,
De son premier clou; puis le double, du deuxième;
Enfin toujours doublant jusqu'au vingt-quatrième.
Pour être possesseur de ce coursier mignon,
Quel prix doit-on donner à l'adroit maquignon?

Et l'auteur conclut :

Et le total acquis fait voir en terminant,
Que le prix du cheval serait exorbitant.

Les vieux comptes. — En supposant que la prescription n'existe pas lorsqu'il s'agit d'un compte, on devrait calculer une dette d'après la formule des intérêts composés qui est la suivante :

$$A = a\,(1 + r)^n.$$

a étant le capital placé, r le taux pour 1 f. par an, n le nombre d'années pendant lesquelles a est resté placé, A ce qu'est devenu a à la fin des n années.

Au taux de 5 p. 100 (soit $r = 0{,}05$) une somme se double en un temps qui est environ 15 ans.

Supposons une erreur de 1 f. dans un compte en 1610 (mort de Henri IV). Ce franc est devenu 2 f. en 1625, 4 f. en 1640, 8 f. en 1655, etc., et aujourd'hui approximativement 2^{21}, soit plus de 2 000 000 de francs.

Un pari curieux. — *Deux amis se promenant au jardin du Luxembourg, l'un d'eux parie à l'autre d'aller à pied jusqu'à la grille de Meudon et de revenir avant que l'autre ait ramassé et rapporté un à un dans un panier, placé au point de départ, 100 cailloux placés en ligne droite à 2 m. de distance les uns des autres.*

Pour ramasser les cailloux, le chemin à effectuer est :

$$4 + 8 + 12 + \ldots\ldots$$

C'est la somme des termes d'une progression arithmétique de raison 4 et qui a 99 termes.

Le terme extrême est : $4 + 98 \times 4 = 396$.

La somme des termes est :

$$\frac{(4 + 396)\,99}{2} = 200 \times 99 = 19\,800 \text{ m}.$$

Or, la distance de Paris à Meudon est d'environ 9 km., ce qui donne aller et retour environ 18 km.

Un engagement difficile à tenir. — *Huit personnes, dînant ensemble, prennent l'engagement de continuer à dîner ensemble jusqu'à ce qu'elles soient parvenues à se ranger autour de la table de toutes les façons possibles.*

Le nombre des permutations possibles est égal à

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40\,320.$$

Ils devraient donc dîner ensemble pendant 40 320 jours soit 110 ans 5 mois 17 jours.

— Avec 5 personnes seulement, il faudrait

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ jours.}$$

Le mobile qui marche pendant toute l'éternité. — *Un mobile parcourt 500 m. pendant la première seconde de marche puis, dans la suite, il parcourt, pendant chaque seconde, un trajet qui est les $\frac{4}{5}$ de celui qu'il a parcouru pendant la seconde précédente. Quelle distance parcourra-t-il s'il continue à marcher indéfiniment?*

Il parcourt $500 + 500 \times \frac{4}{5} + 500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots\ldots$

On obtient ainsi la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison $\frac{4}{5}$ est inférieure à 1.

On sait que cette somme est égale à

$$\frac{500}{1 - \frac{4}{5}} = 2\,500 \text{ m.}$$

Le mobile parcourra 2 500 m. mais, pour effectuer ce parcours, *il mettra un temps infini,* sa vitesse par seconde devenant de plus en plus petite.

Problèmes sur les vitesses relatives.

Problème sur la vitesse moyenne. — *Un cycliste pour aller d'un pays à un autre en montagne marche à la vitesse de 10 km. à l'aller et de 20 km. à l'heure au retour. Quelle est sa vitesse moyenne?*

On est tenté de répondre qu'elle est de

$$\frac{10 + 20}{2} = 15 \text{ km.}$$

Il n'en est pas ainsi parce que pour ce parcours déterminé le temps du retour est plus court que celui de l'aller.

Le temps mis pour faire 1 km. aller et retour est de

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}{2} = \frac{3}{40} \text{ d'heure.}$$

Donc la vitesse moyenne est de

$$\frac{40}{3} = 13 \text{ km. } 33.$$

Les deux coureurs. — *Deux coureurs* A *et* B *partent en même temps, d'un même point, pour aller à un but déterminé.*

A, *du point de départ jusqu'au but parcourt régulièrement* 300 *m. à la minute.*

Jusqu'au milieu de la distance à couvrir, B *parcourt* 280 *m. à la minute puis, pendant la seconde moitié, il parcourt* 320 *m. à la minute.*

1° *Dire quel est celui des deux coureurs qui gagnera la course;*

2° *Si le gagnant arrive* 15 *secondes avant l'autre, dire quelle est la longueur de la course.*

1° Si l est la longueur de la course,

A termine la course en un nombre de minutes égal à $\frac{l}{300}$.

B termine la course en un nombre de minutes égal à

$$\frac{l}{2 \times 280} + \frac{l}{2 \times 320}.$$

ce dernier temps nous donne

$$\frac{l}{560} + \frac{l}{640} = \frac{15l}{4480} = \frac{3l}{896}.$$

Reste à comparer $\frac{l}{300}$ ou $\frac{3l}{900}$ et $\frac{3l}{896}$.

La seconde est plus grande, donc A gagnera la course;

2° La différence des temps mis par les coureurs est, en minutes :

$$\frac{3l}{896} - \frac{l}{300} = \frac{4l}{896 \times 300} = \frac{l}{896 \times 75}.$$

On a donc : $$\frac{l}{896 \times 75} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

et $$l = \frac{896 \times 75}{4} = 16\,800 \text{ m. ou } 16 \text{ km., } 800.$$

Le piéton et le tramway. — *Un piéton qui fait* 6 *km. à l'heure se rend de Versailles à Paris. A* 2 *km. de son point de départ,* *il est dépassé par un tramway parti du même point que lui, mais 10 minutes plus tard. Après avoir parcouru encore 11 km 3, il rencontre, pour la seconde fois, le même tramway qui n'est resté que 10 minutes à la station terminus et qui retourne à Versailles. Calculer la distance des stations extrêmes du tramway.*

(E. N. Aspirants, Paris.)

A la première rencontre, le piéton a déjà marché pendant $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ d'heure ou 20 minutes.

Le tramway parcourt 2 km. en $20 - 10 = 10$ minutes.

Vitesse du tramway à l'heure $2 \times 6 = 12$ km.

Temps pendant lequel le tramway a marché entre les deux rencontres $\frac{34}{3} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{31}{18}$ d'heure.

Si x est, en kilomètres, la distance cherchée, on a :

$$12 \times \frac{31}{18} = x - 2 + x - \left(2 + \frac{34}{3}\right).$$

On en déduit : $x = 18$ km.

Le problème de la mouche et des bœufs. — *Un champ a une longueur l. Il est labouré par deux attelages de bœufs. L'un des attelages se trouve à une extrémité du champ, l'autre à l'autre extrémité. Ils partent en même temps et s'avancent l'un vers l'autre d'un mouvement uniforme avec la même vitesse horaire v. Une mouche posée sur l'un des bœufs quitte celui-ci au moment du départ, s'en va rejoindre l'autre attelage pour revenir immédiatement au premier puis repart tout de suite rejoindre le second et ainsi de suite, se déplaçant d'un mouvement uniforme de vitesse horaire v' telle que l'on ait $v' > v$.*

On demande le trajet effectué par la mouche quand les deux bœufs se sont rejoints.

La solution du problème se fait simplement en remarquant que les bœufs ayant la même vitesse horaire v mettront pour se rencontrer un temps $\frac{l}{2v}$. Comme la mouche s'est déplacée pendant ce temps, sans arrêt et d'un mouvement uniforme de vitesse horaire v', elle aura effectué le trajet $\frac{lv'}{2v}$.

— Ce problème est également présenté sous la forme suivante :

Deux voyageurs partent d'un même point mais à des heures différentes et se déplaçant dans le même sens avec des vitesses permettant à l'un des voyageurs de rattraper l'autre. Un chien se déplace avec une vitesse uniforme, allant de l'un des voyageurs à l'autre jusqu'à ce que les voyageurs se soient rencontrés. On demande la longueur du chemin parcouru par le chien.

La solution est identique à la précédente, il suffit de déterminer pendant combien de temps le chien s'est déplacé.

Le pas cadencé. — *Dans une colonne de troupes en marche à la cadence de 120 pas à la minute, à quelles distances sont répartis les hommes se trouvant au même pas que la musique? On prendra* $\frac{1000 \text{ m.}}{3}$ *pour la vitesse du son par seconde.*

(H. Brocard.)

Supposons que la colonne de troupes suive une route rectiligne. A mesure que l'on s'éloigne de la musique, les hommes perçoivent le son avec un retard qui augmente d'une façon continue, par conséquent, poseront le pied gauche, par exemple, à terre avec un retard qui augmente continuellement.

Le soldat qui est à la distance $\frac{1000 \text{ m.}}{3}$ de la musique perçoit le son avec une seconde de retard. Or, comme il fait 2 pas à la seconde, il se trouve exactement au pas avec les musiciens.

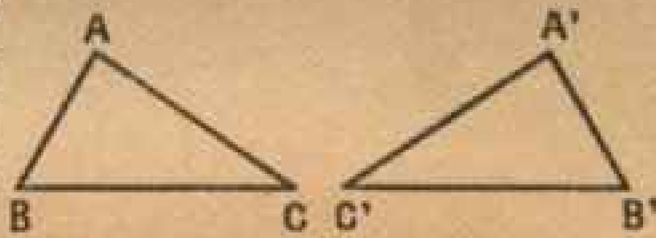
En d'autres termes, voyons ce qui se passe au départ Lorsque les musiciens ont fait deux pas, c'est-à-dire au bout d'une seconde, le soldat qui se trouve à la distance de $\frac{1000 \text{ m.}}{3}$ perçoit le premier son, il effectue donc son premier pas du pied gauche, en même temps que les musiciens effectuent leur pas du même pied.

En résumé, les hommes qui seront exactement au pas de la musique sont ceux qui s'en trouvent éloignés de $\frac{1000 \text{ m.}}{3}$, $\frac{2000 \text{ m.}}{3}$, etc. Les premiers seront de 2 pas en retard sur les pas des musiciens, les seconds de 4 pas, etc.

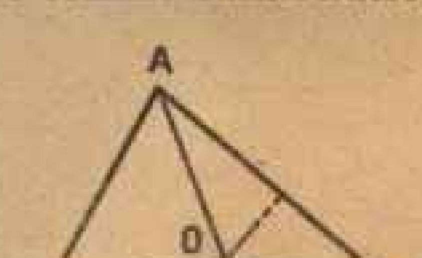
GÉOMÉTRIE AMUSANTE

L'habit du clown. — *Un clown possédait une veste colorée rouge du côté extérieur et bleue du côté intérieur. A l'aide de ciseaux, il découpe dans cette veste un triangle* ABC, *espérant, en le retournant, fermer le trou fait dans la veste, de façon à obtenir extérieurement un triangle bleu sur fond rouge. Il s'aperçoit alors qu'il ne peut fermer le trou avec le triangle retourné. Peut-il en découpant le triangle arriver à obtenir ce qu'il veut?*

Considérons le triangle ABC, imaginons qu'on en détache un triangle identique et qu'on le retourne pour l'appliquer sur le plan A'B'C'. En faisant glisser celui-ci dans le plan, on s'aperçoit qu'il ne peut être amené en coïncidence avec l'autre. En effet, pour mettre les triangles en coïncidence, il faut d'abord faire coïncider deux côtés égaux, par exemple B'C' avec BC. Or, il y a 2 moyens et 2 seulement pour mettre ces deux segments en coïncidence : placer C' en B et B' en C ou encore B' en B et C' en C. Dans un cas comme dans l'autre, les triangles ne coïncident pas, sauf toutefois si le triangle primitif est isocèle.



En somme, un triangle dédoublé d'un autre ne peut après retournement coïncider avec le premier que si l'on a affaire à des triangles isocèles.

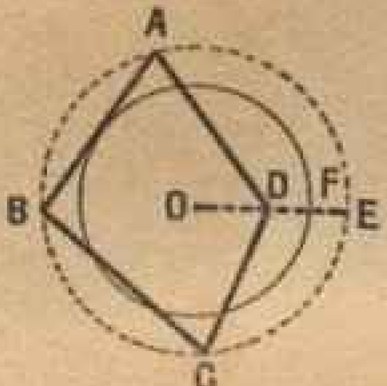


Dans ces conditions, le clown peut facilement se tirer d'affaire : Il suffit de déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et effectuer les sections OA, OB, OC ; les 3 triangles obtenus sont isocèles et on peut retourner chacun d'eux pour le faire coïncider avec sa position primitive.

Si le point O est situé hors du triangle, on coupera le triangle suivant la hauteur AH ; les centres des cercles circonscrits aux deux triangles rectangles sont aux milieux O et O′ des hypoténuses. Il suffira de couper suivant OH et O′H. On obtiendra 4 triangles isocèles qui retournés coïncideront avec leurs positions primitives.

La route circulaire. — *Quatre localités voisines conviennent de construire une route circulaire les desservant toutes quatre. Elles décident de donner la même subvention à condition que la route passera à égale distance de chacune d'elles. Indiquer le tracé de cette route, sachant que les quatre communes occupent les sommets d'un quadrilatère non inscriptible, et indiquer les solutions possibles.*

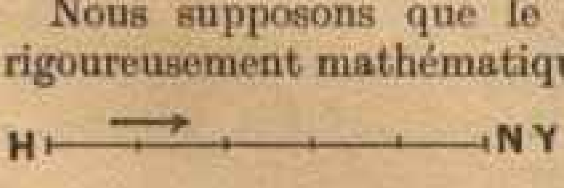
Soient ABCD les quatre localités. Par trois d'entre elles on peut faire passer une circonférence de centre O. Toute circonférence concentrique à cette circonférence passera à égale distance des trois points donnés. La droite joignant le sommet D au centre O coupera la première circonférence en E. La circonférence concentrique à O passant par le milieu F de DE sera une solution du problème. Chacun des points ABC pouvant jouer le rôle de D, il y a en général 4 solutions.



Les paquebots qui se croisent. — *Deux paquebots font un service régulier entre le Havre et New York. Ils mettent exactement 5 jours pour faire la traversée. Ils partent en même temps (le temps étant l'heure du Havre par exemple) des deux villes.*

Combien un paquebot, pendant sa traversée, en rencontrera-t-il d'autres, naviguant en sens inverse?

Nous supposons que le service est régulier d'une façon rigoureusement mathématique. A l'heure précise où un bateau part du Havre un autre part de New York et, à cette heure-là, il y a en mer 4 paquebots se dirigeant sur New York et 1 qui y arrive et 4 paquebots voyageant en sens inverse et 1 qui arrive au Havre. Un paquebot partant de New York ou du Havre



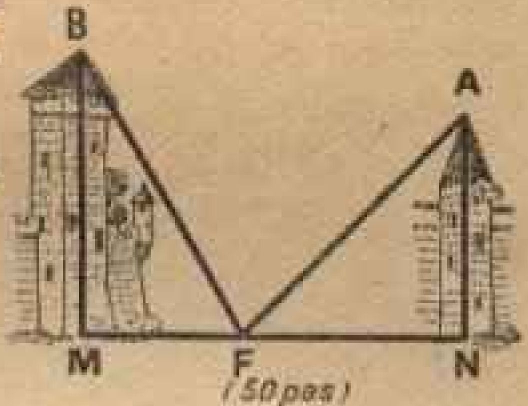
rencontre 10 paquebots en comptant celui qui arrive quand il part et celui qui part quand il arrive.

Les tours et la fontaine. — *Deux tours A et B, hautes l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas. Entre elles se trouve une fontaine F vers laquelle se dirigent deux oiseaux animés de la même vitesse et qui y parviennent en même temps.*

Quelle est la distance horizontale du centre de la fontaine à la base des deux tours?

(Léonard DE PISE.)

Puisque les oiseaux partent en même temps de A et de B animés d'une même vitesse et arrivent en même temps en F c'est que BF = AF.



Soit MF la distance du pied de la tour B à la fontaine F.

$$40^2 + MF^2 = 30^2 + (50 - MF)^2$$
$$100\,MF = 900 + 2\,500 - 1\,600$$
$$MF = 18 \text{ pas.}$$

Doubler ou tripler l'aire d'un cercle. — *Construire un cercle qui ait pour aire le double, le triple, ... de celle d'un cercle donné.*

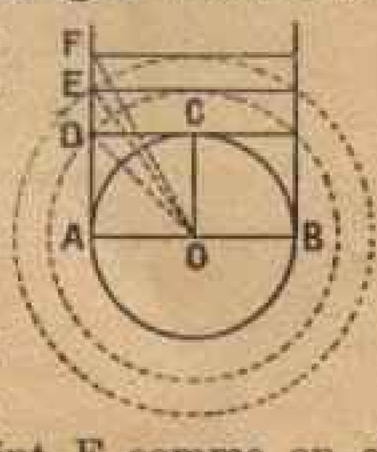
R étant le rayon du cercle donné, x celui du cercle cherché on doit avoir : $\pi x^2 = 2\pi R^2$ ou $x^2 = 2R^2$.

On en déduit : $x = R\sqrt{2}$.

Dans le deuxième cas, on doit avoir : $\pi x^2 = 3\pi R^2$.

On en déduit : $x = R\sqrt{3}$.

D'une façon générale, un cercle dont l'aire égale n fois l'aire d'un cercle de rayon R a pour rayon $R\sqrt{n}$.



Pour construire ces rayons successifs on peut opérer de la façon suivante.

Soit AB le diamètre 2R du cercle donné; traçons OC perpendiculaire à AB et AD tangente en A au cercle.

OD = $R\sqrt{2}$ est le rayon du cercle qui a une aire double de celle du cercle donné.

Traçons ce cercle et déterminons le point E comme on a déterminé D, OE est le rayon du cercle qui a une aire triple de celle du cercle donné car $\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AE}^2$.

Or, $AE = AD + DE = R + (R\sqrt{2} - R) = R\sqrt{2}.$

Donc : $\overline{OE}^2 = R^2 + 2R^2 = 3R^2$ et $OE = R\sqrt{3}.$

On continue de la sorte; OF est le rayon du cercle qui a une aire quadruple de celle du cercle donné, etc.

Problème inverse. — *Diviser un cercle en autant de parties équivalentes que l'on veut à l'aide de circonférences concentriques.*

Autre façon simple de partager un cercle en parties équivalentes. — Prenons un cercle de diamètre AB. Partageons ce diamètre en un certain nombre de parties égales: soient C, D... les points de division.

Décrivons les demi-cercles ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

Les surfaces limitées par les lignes ainsi tracées sont toutes équivalentes. Calculons par exemple celle qui est coupée par la portion de diamètre AC :

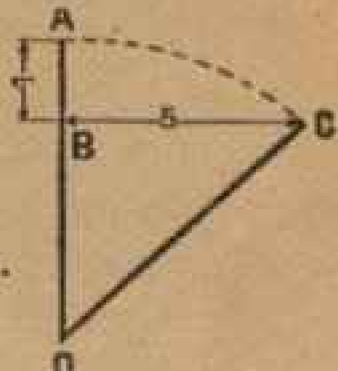
$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{6}R\right)^2$$
$$= \frac{1}{72}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{25}{72}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi R^2.$$

Les deux problèmes qui suivent ont été énoncés dans une publication chinoise, *KinTschang*, 2600 ans avant l'ère chrétienne et édités par *Tsin-Kin-Tschaou*, 1250 ans avant l'ère chrétienne. On remarquera que pour traiter les 2 problèmes, il est nécessaire de connaître la relation de Pythagore entre les côtés du triangle rectangle.

Le problème du roseau. — *Au milieu d'un bassin ayant la forme d'un parallélépipède droit à base carrée, dont le côté a* 10 *pieds de long, se trouve un roseau dont la hauteur dépasse de* 1 *pied le niveau de l'eau; le bassin est complètement rempli d'eau. Si l'on tire ce roseau vers le milieu de l'arête supérieure du bassin, on constate que son extrémité affleure exactement en ce milieu. Quelle est la profondeur du bassin?*

OA, hauteur totale du roseau; OB hauteur de l'eau; BC niveau de l'eau; OC roseau dans sa position oblique.

BC = 5 pieds, BA = 1 pied.



$$OA = OB + 1.$$
$$OA^2 = OB^2 + 2OB + 1.$$

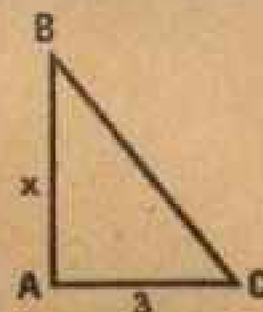
D'après le théorème de Pythagore

$$OA^2 = OC^2 = \overline{OB}^2 + 25.$$

Donc : $\overline{OB}^2 + 25 = \overline{OB}^2 + 2OB + 1.$

On en déduit : $OB = 12$ pieds.

Le problème du bambou. — *Un bambou qui a une hauteur totale de 10 pieds est brisé à une certaine hauteur, la partie supérieure retombe et sa pointe touche le sol à 3 pieds du pied du bambou. A quelle hauteur se trouve-t-il brisé?*



Désignons par x la hauteur AB cherchée exprimée en pieds. BC = a étant la partie brisée.

On a : $a + x = 10$

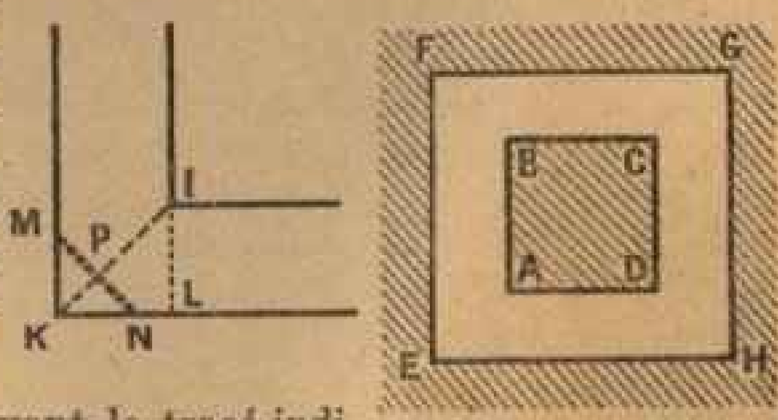
et, d'autre part, dans le triangle rectangle ABC

$$a^2 = x^2 + 9.$$

En éliminant a entre les deux équations, il vient, après simplification :

$$20x = 91 \text{ et } x = 4,55 \text{ pieds.}$$

Le pont improvisé. — *Un terrain carré ABCD est entouré d'un fossé rempli d'eau EFGH qui a exactement 2 m. de largeur. Pour traverser le fossé et pénétrer dans le terrain ABCD, on dispose de deux planches qui, chacune, ont 2 m. de longueur. Pourra-t-on les disposer pour traverser à pied sec?*



On les disposera suivant le tracé indiqué ci-dessus. L'une des planches sera placée en MN de façon à former le triangle MKN rectangle et isocèle et l'autre suivant la direction PI. Supposons MN = 2 m., le triangle MKN est isocèle et rectangle. KP est la moitié de MN soit 1 m.

Or, KI est l'hypoténuse d'un triangle isocèle KIL et on a :

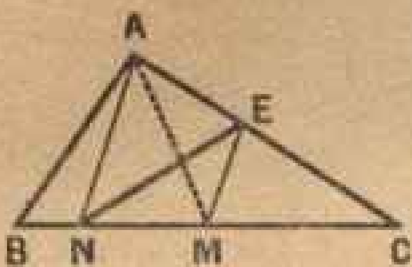
$$KI = IL\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2 \text{ m. } 828;$$

donc : $PI = 2 \text{ m. } 828 - 1 \text{ m.} = 1 \text{ m., } 828;$

PI est inférieur à 2 m.

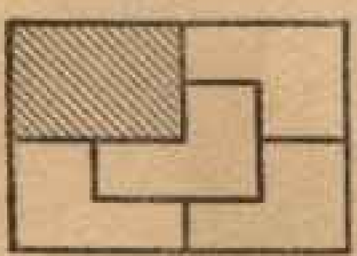
Le puits commun. — *Deux frères ont hérité de leur père un champ triangulaire sur l'un des côtés duquel se trouve un puits. Ils se proposent de partager le terrain en deux parties équivalentes mais de façon que la ligne de partage passe par le centre de l'ouverture du puits de façon que celui-ci soit commun.* (OZANAM.)

Soit ABC le champ à partager, E la position du puits sur le côté AC. Prenons le milieu M de BC. Le triangle AMC est équivalent à la moitié du triangle ABC. Joignons EM et traçons AN parallèle à EM puis joignons EN. Cette dernière ligne donne le partage car les deux triangles EAM et ENM qui ont même base EM et même hauteur sont équivalents de sorte que le triangle NEC est équivalent au triangle MAC et, par suite, est équivalent à la moitié du triangle total.



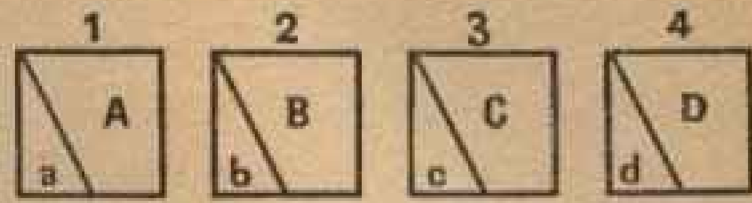
— Nous donnons ce problème de géométrie, très simple d'ailleurs, parce qu'il se trouve dans les *Récréations* d'Ozanam : celui-ci traite aussi le cas où le puits est à l'intérieur du triangle, ainsi que le cas où le triangle, avec le puits à l'intérieur, doit être partagé en 3 parties équivalentes et de façon que le puits reste commun.

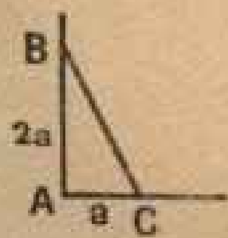
Le partage du champ. — *Un champ rectangulaire doit être partagé entre un père et ses quatre fils. Le père en prend le quart et les enfants se partagent le reste en parties égales. Le quart pris par le père étant la partie hachurée de la figure, déterminer la part des enfants de façon que chaque part soit limitée par des lignes droites parallèles aux côtés du champ et d'une façon simple.*

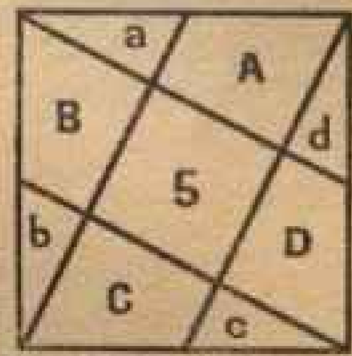


Le partage est indiqué dans la figure ci-jointe.

Avec 5 carrés égaux, en former un seul. — On prendra le milieu d'un côté de l'un des carrés et l'on joindra le point obtenu à l'un des sommets adjacents au côté opposé. On répétera cette même construction pour trois autres carrés. On découpera chacun de ces carrés suivant la ligne tracée ; on obtient ainsi pour chacun d'eux un triangle rectangle et un trapèze rectangle. On dispose toutes ces parties autour du carré restant, ainsi qu'il est indiqué dans la figure. On obtient évidemment un carré qui répond à la question. (OZANAM.)







— On peut d'ailleurs remarquer que a étant le côté d'un des carrés égaux donnés, le côté x du carré cherché doit être tel que

$$x^2 = 5a^2 \text{ ou } x = a\sqrt{5}.$$

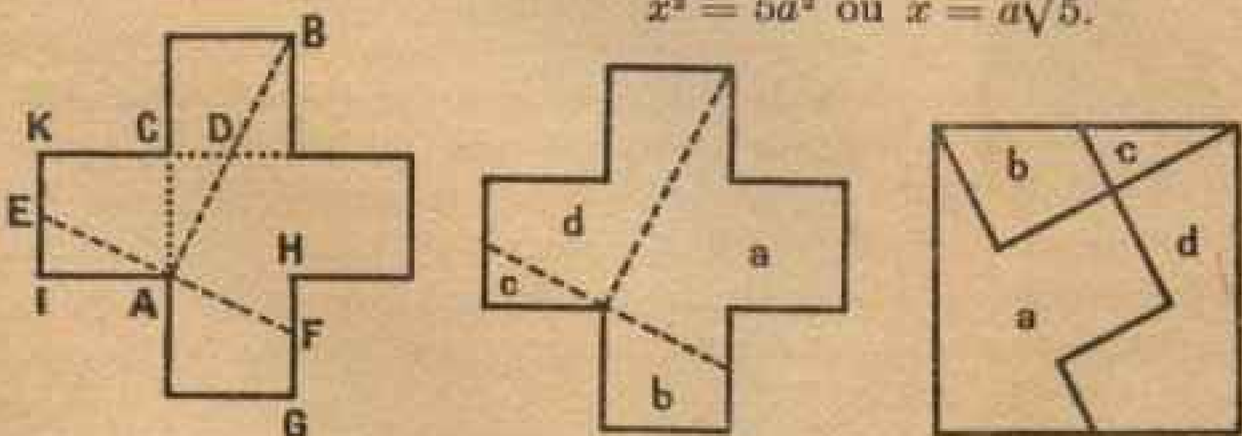
On sait construire $a\sqrt{5}$. Le triangle rectangle ci-contre donne $\overline{BC}^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$ et $BC = a\sqrt{5}$.

Le problème de la Croix rouge. — *La Croix rouge est formée par l'assemblage de 5 carrés égaux. On propose de la découper à l'aide de deux coups de ciseaux et avec les parties obtenues de former un carré équivalent.*

Le problème se rattache au précédent.

Si l'on désigne par a le côté de l'un des carrés donnés et par x le côté du carré cherché, on devra avoir :

$$x^2 = 5a^2 \text{ ou } x = a\sqrt{5}.$$



L'expression $a\sqrt{5}$ nous donne la mesure de la diagonale AB. On a en effet $AB = 2AI$ et, dans le triangle ACI

$$AI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \quad \text{ou} \quad AI^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \text{et} \quad AI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

donc : $$AB = a\sqrt{5}.$$

AB est le côté du carré cherché.

D'autre part, la droite qui joint les milieux E et F des côtés GH et IK passe évidemment par A et, de plus, est perpendiculaire sur AB.

Cette remarque nous donne la solution : On coupera suivant AB et EF et on assemblera les 4 morceaux comme il est indiqué sur la figure.

L'échange des champs. — *Pierre a un champ de forme carrée qui a 400 m. de contour. Louis a un champ rectangulaire de même contour et propose à Pierre de faire l'échange des deux champs. Pierre doit-il accepter?*

(OZANAM.)

Ce problème repose sur le théorème connu : *Quand 2 nombres variables ont une somme constante, leur produit est maximum quand les deux nombres sont égaux.*

Si l'on considère tous les rectangles de même périmètre, leur aire varie avec les dimensions et elle est maximum quand le rectangle est un carré.

Pierre ne doit donc pas accepter l'échange.

Exemple. — Si le champ rectangulaire de Louis a pour dimensions 150 m. et 50 m., son périmètre est 400 m. et son aire $150 \times 50 = 7\,500$ m².

Le champ de Pierre a pour aire $100^2 = 10\,000$ m².

La longueur de la circonférence. — *La terre étant supposée sphérique, parfaitement nivelée, et la longueur du méridien étant de 40 000 km, quelle longueur devrait avoir un fil métallique qui serait tendu sur des poteaux de 1 mètre de hauteur et qui ferait le tour du monde en suivant un grand cercle?*

La réponse est aisée : quel que soit le cercle considéré, si l'on augmente son rayon de 1 m., la longueur de sa circonférence augmente de 6 m., 2832.

En effet, si R est le rayon d'un cercle exprimé en mètres, l la longueur de sa circonférence, on a :

$$l = 2\pi R.$$

Si on augmente le rayon de 1 m., la longueur l' de la nouvelle circonférence est :

$$l' = 2\pi (R + 1) = 2\pi R + 2\pi.$$

La longueur de la circonférence a augmenté de 2π soit 6 m., 2832... et cela quel que soit son rayon.

— On peut aussi résoudre le problème inverse.

Quel que soit le rayon d'une circonférence, si l'on augmente sa longueur de 1 m., le rayon augmente toujours d'une longueur constante.

Si R et l sont le rayon et la longueur d'une circonférence, R′ le rayon de la circonférence qui a pour longueur $l + 1$,

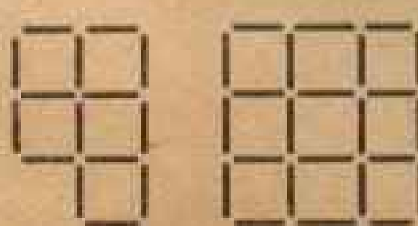
on a : $$l = 2\pi R \quad \text{et} \quad R = \frac{l}{2\pi};$$

$$l + 1 = 2\pi R' \quad \text{et} \quad R' = \frac{l+1}{2\pi} = \frac{l}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

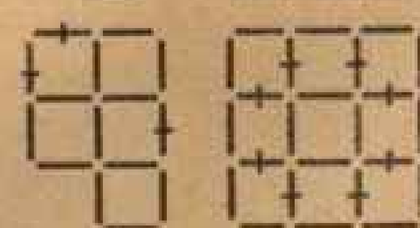
On a donc : $$R' = R + \frac{1}{2\pi}.$$

Le rayon augmente approximativement de 0 m., 159.

On peut jouer avec des allumettes. — I. — Avec 15 allumettes ou 15 jetons longs, on forme la figure ci-contre, comprenant 5 carrés. On demande d'enlever 3 allumettes de façon que la figure restante ne comprenne plus que 3 carrés.



II. — Avec 24 allumettes ou 24 jetons longs, on forme la figure ci-contre comprenant 9 carrés. On demande d'enlever 8 allumettes de façon que la figure restante ne comprenne plus que 2 carrés.



— Les solutions s'aperçoivent immédiatement : on enlèvera dans les deux cas les allumettes indiquées par une barre dans les figures ci-contre.

III. — *On dispose* 11 *allumettes en croix, comme l'indique la figure ci-contre, de sorte qu'à partir du bas de la croix, on compte* 7 *en remontant la branche ou en bifurquant à droite et à gauche. On demande d'enlever deux allumettes* *de façon que la figure restante se présente sous forme de croix et avec les mêmes particularités.*

La figure donne la solution.

— La récréation peut être faite avec des cartes ou des jetons.

— On peut aussi modifier l'énoncé en ajoutant 2 allumettes ou 4 au lieu d'en retrancher.

Problème de la duplication du cube. — Ce problème est connu depuis fort longtemps; c'était, pour les anciens, le *problème de Délos* ou *problème déliaque*, d'après la légende suivante:

Les Athéniens éprouvés par une terrible épidémie consultèrent l'oracle de Délos afin de vaincre le fléau. L'oracle leur ordonna de doubler exactement l'autel d'Apollon. Or, celui-ci était cubique; dans ces conditions, les Athéniens construisirent un autre autel cubique dont l'arête était double de l'arête du premier. En réalité, si l'on désigne l'arête du premier autel par a, la mesure de l'arête du second était $2a$ et son volume $8a^3$. Les Dieux n'étant pas satisfaits, le fléau redoubla d'intensité. L'oracle fut consulté de nouveau et réclama encore un autel cubique double du premier. On consulta Platon et les géomètres intervinrent.

En réalité, l'autel demandé devait avoir pour volume $2a^3$ et pour arête $\sqrt[3]{2a^3}$, soit $a\sqrt[3]{2}$. Archytas, Menœchme, Hippocrate de Chios, Dioclès, etc., pour ne parler que des anciens, ont indiqué des constructions géométriques permettant de réaliser la duplication du cube mais ces solutions étaient ramenées à la construction de deux courbes alors que la solution géométrique exige la construction de $a\sqrt[3]{2}$ à l'aide de la règle et du compas. Ainsi voici l'une des ingénieuses constructions de Menœchme (340 avant l'ère chrétienne) :

Considérons deux paraboles ayant même sommet, leurs axes perpendiculaires, le paramètre de l'une étant double du paramètre de l'autre; leurs équations sont :

$$y^2 = 2ax \text{ et } x^2 = ay.$$

Éliminons y entre les deux équations; on a :

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax \text{ ou } x(x^3 - 2a^3) = 0.$$

L'un des points d'intersection est l'origine et l'autre a pour abscisse $a\sqrt[3]{2}$.

JEUX MATHÉMATIQUES

Les tours de cartes.

Dans le chapitre qui va suivre, nous allons donner quelques tours de cartes simples. Les cartes à jouer sont d'origine orientale; elles firent leur apparition en France au XIVe siècle et se répandirent bientôt de plus en plus surtout lorsque la gravure sur bois fut découverte et que leur prix diminua considérablement. On a dû, dès l'origine, en dehors des parties de cartes ordinaires, chercher des combinaisons ou effectuer des escamotages susceptibles de mystifier les assistants; ce sont les *tours de cartes*. Tous les tours d'escamotage basés sur la dextérité des doigts n'ont pas de raison pour prendre place dans nos récréations, mais il y a des tours où l'escamotage n'entre pas et qui sont basés sur des jeux de position où souvent les nombres jouent un rôle important, aussi n'est-il pas étonnant que dans les premiers recueils de récréations mathématiques qui aient été publiés (par exemple, dans les ouvrages de Nicolas Chuquet, de Bachet, sieur de Méziriac, etc.) on trouve déjà des tours de cartes. Nous allons en indiquer quelques-uns; certains d'entre eux peuvent d'ailleurs s'effectuer avec des pions, nous l'indiquerons quand il y aura lieu.

La carte devinée. — *On prend* 21 *cartes et on en fait* 3 *paquets de* 7. *On demande à une personne de choisir par la pensée une carte quelconque et d'indiquer dans quel paquet elle se trouve, se réservant de la trouver.*

Vous placez les trois paquets l'un au-dessous de l'autre, le paquet renfermant la carte choisie étant le second; puis, les cartes ayant la face tournée vers le bas, on les distribue en les retournant. On en met successivement trois sur une première ligne et on continue, trois sur une seconde, etc., dans l'ordre indiqué par le tableau.

1	2	3
4	5	6
7	8	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

On demande ensuite dans quelle colonne verticale se trouve la carte choisie.

On ramasse ensuite les cartes par colonnes sans déranger leur ordre, le tas qui contient la carte choisie étant placé entre les deux autres. On recommence à distribuer les cartes comme précédemment, on demande de nouveau dans quelle colonne se trouve la carte choisie.

On opère une troisième fois de la même façon. — La carte cherchée se trouve la 11e et par suite se place au milieu du tableau. On pourra la désigner.

(Nicolas Chuquet.)

— La même récréation peut se faire avec 15 ou 21 cartes.

— D'une façon générale, avec un nombre impair quelconque de cartes distribuées en un nombre impair de tas, on pourra toujours amener la carte choisie au milieu du jeu en opérant comme il a été fait plus haut.

L'explication est facile :

Quand on ramasse les cartes pour la première fois, la carte cherchée se trouve dans le jeu reconstitué à un rang compris entre le 8e et le 14e (ces deux rangs compris).

Or, $8 = 3 \times 2 + 2$; $9 = 3 \times 3$; $10 = 3 \times 3 + 1$......... $14 = 3 \times 4 + 2$.

Quand on reforme les 3 colonnes de 7 cartes chacune, il suffit d'examiner la façon d'opérer pour voir que la carte cherchée se trouve, soit sur la 3e ligne horizontale, soit sur la 4e, soit sur la 5e et, par suite, lorsque le jeu sera reformé, cette carte occupera le 10e ou le 11e, ou le 12e rang.

Or, $10 = 3 \times 3 + 1$; $11 = 3 \times 3 + 2$; $12 = 3 \times 4$.

Lorsque l'on étalera de nouveau les cartes, la carte cherchée sera sur la 4e ligne horizontale et, par suite, se placera la onzième lorsque le jeu sera reformé.

A partir de ce moment, elle restera toujours la onzième dans le jeu reformé, dans le jeu étalé, sera toujours placée à la 4e ligne horizontale et au milieu si l'on opère comme il est indiqué.

Deviner la somme des points de 3 cartes inconnues. — I. — *Faites tirer au hasard* 3 *cartes d'un jeu de piquet* (32 *cartes*) *et proposez de deviner la somme des points qui correspondent à ces trois cartes* (*l'as étant compté pour* 11, *le roi, la dame et le valet* *pour 10 et chacune des autres pour le nombre de points qu'elles indiquent*).

(Nicolas Chuquet.)

Faites disposer les 3 cartes la face sur la table. Faites placer sur chaque carte un nombre de cartes égal à la différence entre 15 et la valeur de la carte considérée. Par exemple, sur un sept, on placera 8 cartes, sur un roi, on placera 5 cartes, etc. Faites-vous remettre ce qui reste du jeu. Comptez le nombre de cartes restantes, ajoutez 16 et vous obtiendrez le nombre total des points indiqués par les trois cartes primitives.

Explication. — Si x est la somme cherchée, on a placé sur les trois cartes un nombre de cartes égal à $45 - x$. On a donc utilisé un nombre de cartes égal à $48 - x$. S'il en reste un nombre a, on a :

$$48 - x + a = 32.$$

On déduit de là : $$x = a + 16.$$

II. — *Supposons que le jeu ait 52 cartes.*

On opérera de la même façon et, du nombre des cartes restantes, il suffira de retrancher 4 pour avoir la somme cherchée.

En effet, si a est le nombre des cartes restantes, on a :

$$48 - x + a = 52, \text{ d'où } x = a - 4.$$

On peut évidemment opérer avec un nombre quelconque n de cartes, on a :

$$48 - x + a = n \text{ et } x = 48 + a - n;$$

$a - n$ peut être positif ou négatif; connaissant a et n, on obtient x.

Deviner la carte qu'une personne aura pensée. — *On disposera 13 cartes de même couleur prises dans un jeu de 52 cartes, en les disposant successivement dans l'ordre de leurs valeurs, l'as comptant pour* 1 *et ainsi de suite, le valet pour* 11, *la dame pour* 12 *et le roi pour* 13.

On prie quelqu'un de choisir par la pensée l'une de ces cartes. On frappe avec le doigt ou un crayon sur les cartes, en priant la personne d'ajouter mentalement 1 *au nombre qui correspond à la carte qu'elle a choisie, chaque fois que l'on frappe sur une carte.*

Lorsque la personne arrivera à compter le nombre 20, *elle doit prévenir et la carte pensée devra se trouver être la carte frappée correspondante.*

On commencera par frapper 6 cartes au hasard, puis le 7^e coup sera frappé sur le roi, le 8^e sur la dame et ainsi de suite.

On conçoit facilement que, dans ces conditions, que lorsque la personne comptera 20, la carte frappée sera celle que l'on cherche ; en effet, si la personne a choisi le roi, elle comptera 20 au 7^e coup frappé, si elle a choisi la dame, elle comptera 20 au 8^e coup et ainsi de suite. Dans chaque cas, la carte choisie se trouve indiquée.

— On pourra aussi demander à la personne de compter simplement jusqu'à 15 et dans ces conditions, on frappera un seul coup au hasard, le second étant frappé sur le roi, le troisième sur la dame et ainsi de suite.

— Cette récréation est identique à celle (V. p. 85) qui permet de trouver l'heure pensée par une personne.

Deviner la somme des points de 4 cartes inconnues. — *Prenons un jeu de 32 cartes, donnons à ces cartes des valeurs particulières, par exemple : un valet comptera pour 2, une dame pour 3, un roi pour 4 et toutes les autres pour le nombre de points qu'elles indiquent, 1 pour l'as, 7 pour le sept, etc. Vous vous retirez tandis que quelqu'un dispose les cartes de la façon suivante :*

Il retourne une première carte, valeur en vue, puis il place successivement sur cette carte un nombre de cartes retournées égal à la différence entre 10 et la carte considérée ; cela fait, il retourne la carte suivante et opère de la même façon, puis une troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que le tas ainsi formé soit réalisable (si la carte retournée est un dix, le tas se trouve formé) ; dans ces conditions, il restera, en général, des cartes inutilisées. Cela fait, il retournera tous les tas.

Il s'agit pour vous, rentrant dans la salle, de donner immédiatement le nombre des points correspondants aux cartes qui se trouvent les premières des tas formés.

Vous multipliez le nombre des tas par 11, au produit obtenu vous ajoutez le nombre des cartes qui restent (qui peut être zéro), puis vous retranchez de la somme le nombre total des cartes soit 32.

Explication. — Si a est le nombre de tas, le nombre des cartes placées sur les premières est $10a - S$, si S est la somme cherchée ; le nombre des cartes comprises dans les tas est $10a - S + a$ et si n est le nombre des cartes qui restent, on a :

$$11a - S + n = 32 \text{ d'où } S = 11a + n - 32.$$

On peut évidemment choisir un autre nombre que 10 pour compléter les tas. On trouvera encore facilement la solution.

Deviner plusieurs cartes pensées par plusieurs personnes. — *Montrer 4 cartes à une première personne et lui dire de penser une de ces cartes, 4 autres cartes à une seconde personne et lui dire de penser également une de ces cartes, puis 4 autres cartes à une troisième et 4 autres à une quatrième, celles-ci pensant également une des cartes du groupe correspondant.*

Ramasser les cartes en plaçant le premier paquet sur le second, puis le tout sur le troisième et enfin le tout sur le quatrième. Distribuer de nouveau les cartes en les plaçant par colonnes verticales de 4.

En demandant à chaque personne dans quelle rangée horizontale se trouve la carte qu'elle a retenue mentalement vous devinez alors immédiatement quelle est cette carte.

La carte pensée par la première personne se trouvera évidemment dans la première colonne verticale; celle qui a été pensée par la seconde dans la seconde colonne et ainsi de suite.

Dans ces conditions, en demandant à chaque personne dans quelle rangée horizontale se trouve la carte qu'elle a pensée on pourra la désigner immédiatement.

— Connaissant les 4 cartes cherchées, on pourra d'ailleurs ramasser les 16 cartes de façon à les grouper ensemble et les sortir du jeu dans l'ordre que l'on voudra.

(Bachet, sieur de Meziriac.)

On peut imaginer d'autres récréations analogues, par exemple :

— *On prend un jeu de 32 cartes et on les dispose en cercle, puis, à partir d'une carte déterminée, l'as de pique par exemple, sur lequel on compte 1, on compte de 4 en 4, en enlevant la 4e et on continue, toujours dans le même sens, en enlevant toujours la 4e jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 4 cartes sur le cercle. Dans quel ordre faut-il placer primitivement les cartes pour que les 4 cartes qui restent soient 4 cartes désignées à l'avance?*

On constatera, en opérant sur des nombres, que les 4 cartes restantes occupent les rangs 1, 14, 17, 25 à partir de la carte servant de point de départ. Dans ces conditions, on placera les cartes indiquées comme devant rester aux rangs 1, 14, 17, 25.

On peut évidemment se proposer la récréation inverse :

Disposant d'un jeu de 32 cartes que l'on a disposées en cercle, à partir d'une carte déterminée, on compte successivement les cartes de 10 en 10, en suivant le même sens, et on enlève régulièrement la dixième. Comment doit-on disposer les cartes pour que les 8 premières cartes sorties, par exemple, soient des cartes désignées à l'avance?

On déterminera les rangs où il faut placer les 8 cartes désignées à l'avance en opérant préalablement sur des nombres. On trouve comme rangs à assigner :

8, 10, 11, 19, 20, 23, 30, 31.

Deviner les couples de cartes. — Prenez 20 cartes, distribuez-les deux par deux et faites choisir un groupe quelconque de deux cartes que vous vous proposez de deviner.

Vous ramassez les cartes par couples, en mettant les couples dans un ordre quelconque. Vous imaginez écrits devant vous les quatre mots suivants :

mutus
nomen
dedit
cocis

Dans ces mots de 5 lettres, il y a 2 m, 2 u, 2 t, etc.

Vous disposez les cartes en plaçant les deux premières à la place des deux *m*, les deux secondes à la place des deux *u*, les deux suivantes à la place des deux *t* et ainsi de suite.

Vous demandez ensuite au partenaire dans quelle ligne horizontale ou dans quelles lignes horizontales se trouvent les deux cartes qu'il a choisies et vous pouvez évidemment les nommer tout de suite.

Ainsi, par exemple, si ces deux cartes se trouvent dans la première ligne, ce sont la deuxième et la quatrième, si elles se trouvent l'une dans la seconde, l'autre dans la quatrième ligne, ce sont les cartes qui occupent la place des deux *o*, etc.

Deviner le groupe de deux cartes que quelqu'un aura pensé. — La récréation peut se faire avec un nombre de cartes qui soit égal au produit de deux nombres consécutifs, par exemple : $12 = 4 \times 3$, $20 = 5 \times 4$, $30 = 6 \times 5$, $42 = 6 \times 7$.

On distribuera les cartes par groupes de deux, les figures en vue et on demandera à quelqu'un de retenir par la pensée deux de ces cartes accouplées.

On ramassera les cartes par groupes et dans un ordre quelconque, puis, on les distribuera, figures en vue, comme il va être indiqué.

Désignons les cartes que l'on distribue successivement par les numéros d'ordre 1, 2, 3, 4, ...

Supposons qu'il y ait 20 cartes; on les disposera comme il est indiqué dans le tableau suivant :

A	1	2	3	5	7
B	4	9	10	11	13
C	6	12	15	16	17
D	8	14	18	19	20

On demandera dans quelles rangées horizontales se trouvent les cartes pensées. Si elles se trouvent dans une même rangée, on les indiquera facilement car, si c'est dans la rangée A, elles seront évidemment aux numéros 1 et 2; dans la rangée B, elles seront en 9 et 10; dans la rangée C, en 15 et 16; dans la rangée D en 19 et 20. Supposons maintenant qu'elles soient dans deux rangées différentes, on les repérera tout aussi facilement puisqu'elles correspondront à deux nombres consécutifs qui seront autres que les nombres consécutifs contenus dans chaque rangée. Par exemple, les cartes se trouvent dans les rangées A et D, ce sera évidemment 7 et 8; si elles se trouvent dans les rangées A et B ce sera évidemment 3 et 4, etc.

On peut encore opérer comme l'indique Bachet : les nombres 1 et 2 du premier rang, 9 et 10 du second, 15 et 16 du troisième, 19 et 20 du quatrième constituent les clefs du jeu. Supposons, par exemple, que les cartes se trouvent dans les rangées B et D. On prend la clef de la rangée la plus élevée B, soit 9 et 10, à partir de 9 on descend verticalement jusque sur la rangée D, on trouve 14, puis, sur la rangée B, on prend à partir de 10, sur la droite horizontale un nombre éloigné de 10 d'autant que 14 est éloigné de 9, on trouve 13; les cartes cherchées sont aux numéros 13 et 14.

Si l'on veut faire la récréation avec 30 cartes, on les disposera comme il est montré à la page suivante, en suivant la même règle que précédemment.

On formera de la même façon un tableau permettant d'opérer avec 42 cartes :

En somme, cette récréation, empruntée à Bachet de Meziriac, est analogue à la précédente; les groupes de deux cartes sont disposés de façon que, à la simple vue des lignes où se trouvent ces cartes, on puisse sans ambiguïté les repérer immédiatement.

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

Les cartes distribuées. — *Trois personnes prennent chacune une carte dans trois cartes connues. Deviner la carte prise par chaque personne.*

Présentez 3 cartes connues à 3 personnes, par exemple, le roi, la dame et le valet de cœur et demandez à ces personnes de se les distribuer à votre insu.

Attribuez à chacune des personnes (après leur avoir donné un numéro d'ordre) un nombre déterminé, 12 à la première, 24 à la seconde, 36 à la troisième.

Priez la personne qui a le valet d'ajouter la moitié du nombre qui lui a été attribué au tiers du nombre attribué à la personne qui a la dame et la somme obtenue au quart du nombre attribué à la personne qui a le roi.

Demandez le résultat.

Si celui-ci est	29,	la première a	le roi,	la deuxième	la dame.
Si	» 27,	»	le roi,	»	le valet.
Si	» 25,	»	la dame	»	le valet.
Si	» 28, le contraire de 29.				
Si	» 24,	»	27.		
Si	» 23,	»	25.		

Démonstration. — Six cas seulement peuvent se présenter, car il n'y a que 6 combinaisons possibles, c'est-à-dire 6 manières différentes de grouper les trois cartes.

On a calculé le résultat dans chaque cas et les nombres ont été choisis de façon que le même résultat ne puisse se présenter dans deux cas différents.

On peut évidemment changer les nombres pourvu que cette dernière condition soit encore remplie et calculer le résultat pour chacune des combinaisons.

Jeux divers.

Les dominos déplacés. — *On range en ligne droite, de gauche à droite,* 13 *dominos ayant pour valeurs successives :*

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

On les retourne de façon à masquer les valeurs.

On dispose à la suite, sur la droite et sur la même ligne, 12 *dominos retournés, valeurs cachées et quelconques. Une personne enlève, à droite, parmi les* 12 *dominos rapportés un certain nombre de ceux-ci et les transporte à la gauche de ceux qui restent en ligne, points toujours masqués. Deviner le nombre des dominos transportés.*

Il est facile d'établir que l'opération indiquée ayant été faite le nombre des dominos qui ont été déplacés est égal à la valeur du domino qui se trouve au milieu de la rangée.

Il y a en tout $13 + 12 = 25$ dominos; celui du milieu est le 13^e^ à partir d'une des extrémités, de la droite par exemple. Ce 13^e^ est le domino qui a pour valeur 0.

Si l'on déplace un domino, de la droite vers la gauche, le domino du milieu est alors celui qui a pour valeur 1. Si l'on en déplace **4**, le domino du milieu devient celui qui a pour valeur 4.

Dans ces conditions, quand on aura déplacé n dominos, n n'étant pas supérieur à 12, le domino qui se trouvera au milieu de la nouvelle rangée sera celui qui a pour valeur n.

Il suffira donc de retourner le domino qui occupe la place du milieu pour répondre à la question.

Remarque I. — La récréation peut être faite en utilisant des cartons de même dimension ou des feuilles de papier, 12 d'entre eux étant numérotés.

Remarque II. — On peut évidemment généraliser et prendre un nombre quelconque de cartons numérotés.

Le dernier jeton. — *Le jeu se joue à deux personnes. Sur une pile de jetons dont le nombre est connu, deux personnes prennent successivement* 1 *ou* 2 *ou* 3 *jetons, celui qui prend le dernier jeton perd la partie.*

On s'arrange pour qu'il reste 1 jeton à prendre en dernier lieu par son partenaire.

Par exemple, supposons que la pile de jetons en renferme 32 et que je commence la partie, je prendrai 1 ou 2 ou 3 jetons d'abord, et cela de façon que le reste soit un multiple de 4 plus 1. Ici, je prendrai 3 jetons, il en restera 29; 29 divisé par 4 donne comme reste 1. Dans ces conditions, je prendrai par la suite, chaque fois, un nombre de jetons qui soit le complément à 4 du nombre de jetons qu'a pris mon partenaire : s'il prend un jeton, j'en prendrai 3; s'il en prend 2, j'en prendrai 2, etc. Dans ces conditions, après que mon partenaire aura joué 7 fois et moi (1 + 7) fois, nous aurons enlevé $3 + 4 \times 7 = 31$ jetons, il en restera 1 à prendre par mon partenaire.

Si mon partenaire joue le premier, après qu'il aura joué une fois, il restera un nombre de jetons connu que je traiterai comme précédemment, c'est-à-dire comme si la partie seulement commençait. Cela, bien entendu, ne se peut faire que si le partenaire ne connaît pas la solution du problème.

On peut évidemment modifier la règle du jeu, le nombre de jetons à prendre chaque fois pouvant être un nombre compris entre 1 et 7 par exemple. La solution qui permettra de gagner la partie est analogue à celle que nous venons d'indiquer.

— On peut modifier le problème lui-même :

Les conditions du jeu restent les mêmes, celui qui prend le dernier jeton gagne la partie.

Deux cas peuvent se présenter :

1° *Le nombre des jetons est un multiple de* 4.

a) Si mon partenaire joue le premier, il me suffira de prendre chaque fois le complément à 4 du nombre de jetons qu'il prendra;

b) Si je commence la partie, je m'arrangerai de façon qu'à un moment donné, le nombre des jetons restants devienne un multiple de 4 alors que mon partenaire est le premier à jouer et alors j'opérerai comme il vient d'être dit;

2° *Le nombre des jetons n'est pas multiple de* 4.

a) Si je joue le premier, je prendrai d'abord un nombre de jetons égal au reste de la division du nombre de jetons par 4, puis j'opérerai comme il a été indiqué;

b) Si mon partenaire joue le premier, je m'arrangerai de façon qu'à partir d'un certain moment le nombre des jetons restants soit un multiple de 4 alors que mon partenaire est le premier à jouer et je continuerai ensuite comme il a été dit.

On peut évidemment modifier la règle du jeu, le nombre des jetons pouvant être pris chaque fois variant de 1 à un nombre autre que 4.

Généralisation du problème. — *Sur une pile de jetons dont le nombre est connu, deux personnes prennent successivement ou 3, ou 4, ou 5 jetons, celui qui prend les derniers aura perdu la partie.*

On devra évidemment faire en sorte qu'il reste 1 ou 2 ou 3 jetons à prendre, en dernier lieu, par son partenaire.

Si je commence la partie, je prendrai un nombre de jetons tel que le nombre de ceux qui restent soit un multiple de 8 plus 1 ou multiple de 8 plus 2 ou multiple de 8 plus 3, puis, dans la suite, je prendrai, chaque fois, le complément à 8 du nombre pris par mon partenaire.

Supposons, par exemple, que le nombre de jetons soit 51, je commencerai par prendre 2 jetons ou 1 jeton. Le reste est multiple de 8 plus 1 ou multiple de 8 plus 2. Dans ces conditions, chaque fois que je joue après mon partenaire, 8 jetons se trouvant enlevés par nos prises successives, il restera, en définitive, soit 1 jeton, soit 2 jetons à prendre par mon partenaire.

Si je joue le second (je suppose que mon partenaire ne connaisse pas la solution de la récréation), il me reste un nombre de jetons connus et j'opère comme il est indiqué plus haut.

Taquin ou Jeu de quinze. — Ce jeu qui semble abandonné aujourd'hui a été très en honneur dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle.

Une boîte renferme 16 jetons carrés rangés sur 4 lignes de 4 jetons chacune. Ces jetons sont numérotés de 1 à 16.

En les plaçant au hasard et en enlevant le jeton 16, il reste une place vide. Il s'agit d'en profiter pour faire glisser les jetons de proche en proche et arriver à disposer les jetons dans leur ordre naturel comme l'indique la figure.

La théorie complète et mathématique du Taquin a été donnée par E. Lucas. Le problème tel que nous l'avons posé est impossible dans la moitié des cas. On pourra toujours mettre les 13 premiers jetons à leur place, mais les deux derniers pourront alors se trouver intervertis.

Lorsque le problème est possible, une personne exercée le résout en quelques minutes. Celui qui n'est pas exercé tâtonne plus longtemps; mais ordinairement il finit aussi par arriver au résultat.

Lorsque le problème est impossible, rien ne l'indique d'abord; mais, en opérant comme s'il était possible, on arrive à placer les numéros dans l'ordre demandé, à l'exception de deux qui occupent la place l'un de l'autre.

C'est à ce caractère qu'on reconnaît l'impossibilité du problème proposé.

Dans les cas solubles on peut arriver de bien des manières à replacer les 15 numéros dans l'ordre exigé. On peut aussi tracer une marche qui abrège les tâtonnements des commençants.

Il y a sur le périmètre du tableau onze numéros placés dans l'ordre indiqué par la figure ci-contre :

1	2	3	4
5			8
9			12
13	14	15	

Ces onze numéros composent ce que l'on appelle le train de ceinture, et les quatre autres forment le carré central.

Cela posé, la marche indiquée ici comprend les trois opérations suivantes :

1° Former le train de ceinture;

2° Conduire le train à destination, c'est-à-dire jusqu'au point où les onze dés qui le composent sont à la place qui leur est assignée par la figure;

3° Régulariser le carré central.

Pour effectuer la première opération, on peut, à l'aide de la case vide, faire circuler le train de ceinture dans un sens ou dans l'autre; et quand un numéro ne s'y trouve pas à sa place, on le fait rentrer dans le carré central, et on le glisse ensuite derrière celui qui doit le précéder dans le train de ceinture.

Lorsque le train de ceinture est composé, on peut, même avant de le conduire à destination, reconnaître si le problème est possible ou non. Si le problème est reconnu impossible, il est évident qu'il n'y a plus rien à faire; tandis que si le problème est possible, il reste à régulariser le carré central et à conduire le train de ceinture à destination : deux opérations indépendantes l'une de l'autre, et qu'on est libre d'effectuer l'une avant ou après l'autre.

1° Si les quatre numéros du carré central sont en place, le problème est possible, et pour l'achever, il ne reste plus qu'à conduire le train à destination;

2° S'il n'y a que deux numéros en place, le problème est impossible, et il est inutile de vouloir aller plus loin;

3° S'il n'y a qu'un numéro à sa place dans le carré, le problème est possible.

Pour l'achever, on prend le numéro qui est à son rang et on le pousse dans le chemin de ceinture, après lui avoir fait place en coupant le train. Ensuite, on pousse dans la case vide un des trois dés restés dans le carré puis en continuant le même mouvement tournant, on fait encore avancer d'une place chacun des trois dés, et enfin on rentre dans le carré le numéro que l'on en avait sorti. Le carré central se trouvant ainsi régularisé, il ne reste plus qu'à conduire le train à destination;

4° Si aucun des quatre numéros du carré central n'est à son rang, voyez si le dé dont le n° 6 occupe la place est lui-même à la place du n° 6. Si oui, le problème est possible, sinon il est impossible.

Pour achever le problème dans le cas où il est possible, on prend un des quatre numéros à volonté, et on le pousse dans le chemin de ceinture, après lui avoir fait place en coupant le train. Ensuite, on pousse dans la case vide un autre dé du carré; puis, en continuant le même mouvement tournant, on fait encore avancer d'une place chacun des trois dés du carré et on rentre le quatrième. Dans cet état, un seul des quatre numéros du carré est à sa place, et l'on traite ce cas d'après la règle qui vient d'être donnée plus haut.

La tour de Hanoï (1). — La tour est représentée par une série de disques de bois, de diamètres variables, percés en leur centre, et enfilés dans l'ordre des diamètres décroissants sur l'une des trois tiges verticales fixées sur une tablette. La récréation consiste à déplacer les différents disques, un seul à la fois, en l'enfilant dans l'une des autres tiges de façon à reconstituer la tour sur l'une des tiges. L'un des étages de la tour ne pourra

(1) Inventé par Lucas : *Récréations mathématiques* (t. III, p. 59). Lucas, mathématicien français (1842-1891).

jamais être posé sur un étage de moindre diamètre; chacun des disques pouvant être pris sur une des tiges pour être porté sur l'autre.

Le résultat peut toujours être atteint.

Si la tour n'a qu'un étage (2 disques), il faut 3 déplacements.
Si la tour a 2 étages (3 disques), il faut 7 déplacements.
Si la tour a 3 étages (4 disques), il faut 15 déplacements.

. . . .

Si la tour a 9 étages (10 disques), il faut 511 déplacements.

Mots croisés arithmétiques. — Nous donnons à titre d'exemple un mot croisé arithmétique.

HORIZONTALEMENT :

1° Carré parfait multiple de 7;

2° Date de la mort d'un empereur d'Occident;

3° Le triple d'un nombre premier;

4° Valeur de 1 000 f. placés à intérêts composés à 4,5 p. 100 au bout de 31 ans.

VERTICALEMENT :

1° Date de naissance d'un célèbre chimiste suédois;

2° Nombre total des diagonales d'un polygone de 121 côtés;

3° *Square inch* (mesure anglaise de superficie).

4° Carré parfait. — Nombre d'or en 1961.

Solution :

HORIZONTALEMENT :

1° $1764 = 7^2 \times 2^2 \times 3^2$;

1	7	6	4
8	1	4	
3	3	5	1
3	9	1	3

2° Charlemagne est mort en 814;

3° $3351 = 3 \times 1\,117$;

4° $1\,000\,(1{,}045)^{31} = 3\,913$ par défaut.

VERTICALEMENT :

1° Nobel est né en 1833;

2° $\dfrac{121 \times 118}{2} = 7\,139$;

3° *Square inch* vaut 6,451 cm² par défaut;

4° $4 = 2^2$. — Nombre d'or pour 1961 (Annuaire du bureau des longitudes) = 13.

Problèmes sur la table de Pythagore. — I. — *Sachant que la somme des 9 premiers nombres est 45, trouver la somme des nombres contenus dans la table de Pythagore. Généraliser.*

La somme des nombres de la première ligne est 45.

La deuxième ligne étant obtenue en ajoutant respectivement les nombres de la première ligne à eux-mêmes, la somme des nombres qui la composent est 45×2.

La somme des nombres de la troisième ligne est 45×3.

......

La somme totale des nombres de la table est :

$$45 + 45 \times 2 + 45 \times 3 + \ldots + 45 \times 9 = 45\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 9)$$
$$= 45 \times 45 = 45^2 \text{ soit } 2025.$$

Si l'on formait une table de Pythagore avec les n premiers nombres entiers, on aurait, en appelant N la somme des n premiers nombres entiers :

$$\text{Somme des nombres de la table} = \text{N}^2.$$

On pourrait d'ailleurs calculer cette somme en fonction de n, car on a :

$$\text{N} = \frac{n\,(n + 1)}{2}.$$

II. — *Dans chaque colonne ou dans chaque ligne de la table de Pythagore, un nombre quelconque est la demi-somme de celui qui le précède et de celui qui le suit.*

Considérons trois nombres consécutifs d'une colonne commençant par le nombre n.

Si le nombre moyen vaut np, celui qui le précède vaut $n\,(p - 1)$ et celui qui le suit $n\,(p + 1)$.

On a : $$n\,(p - 1) + n\,(p + 1) = 2\,np.$$

D'où $$np = \frac{n\,(p - 1) + n\,(p + 1)}{2}.$$

On ferait le même raisonnement pour trois nombres consécutifs d'une même ligne.

III. — *Dans la table de Pythagore, si un nombre est au centre d'un carré dont les sommets sont occupés par quatre autres nombres de la table, la somme de ces quatre nombres est égale à quatre fois le nombre situé au centre.*

Soit le nombre α placé au centre d'un carré dont les sommets sont a, b, c, et d. Le nombre qui le précède sur la même ligne est α_1 et celui qui le suit α_2.

D'après le problème précédent, $a + c = 2\alpha_1$ et $b + d = 2\alpha_2$.

Par suite : $a + b + c + d = 2\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = 2\,(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Mais $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\,\alpha$.

Donc : $a + b + c + d = 4\,\alpha$.

IV. — *Dans la table de Pythagore, la somme de huit nombres situés dans le carré qui entoure un nombre considéré est égale à huit fois celui-ci.*

Soit le nombre α au centre d'un carré formé par les nombres a, b, c, d, e, f, g, h.

D'après le problème précédent, on a : $a + c + f + h = 4\alpha$.

D'autre part, $d + e = 2\alpha$.

et $b + g = 2\alpha$.

Donc : $a + b + c + d + e + f + g + h = 8\alpha$.

Triangle arithmétique de Pascal. — La première ligne du triangle est formée du nombre 1. Si l'on suppose que chaque ligne, même la première, est précédée et suivie d'un zéro (que l'on n'écrit pas) le triangle de Pascal se forme de la façon suivante : on écrit au-dessous de chaque nombre la somme de ce nombre et de celui qui est à sa gauche. Ainsi la 2e ligne comprend : $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$; la 3e ligne comprend : $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2$, $0 + 1 = 1$; etc.

Formons de cette façon un triangle composé de 10 lignes.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Remarques. — 1° *La somme des nombres de chaque ligne est égale au double de la somme des nombres de la ligne précédente.*

Représentons le triangle de Pascal de la façon ci-contre :

1	Démontrons que l'on a, par exemple :
1 1	$1+d+e+f+1=2(1+b+c+1)$
1 a 1	En effet : $d=b+1$
1 b c 1	$e=c+b$
1 d e f 1	$f=1+c$

Par suite, $1+d+e+f+1=1+b+1+c+b+1+c$
$$=2(1+b+c+1)$$

2° *Somme des nombres de la n^e ligne.*

La somme des nombres de la 1re ligne est 1

»	»	2e	»	$1\times 2=2^1$
»	»	3e	»	$2\times 2=2^2$
»	»	4e	»	$2^2\times 2=2^3$

......

La somme des nombres de la n^e ligne est 2^{n-1}.

3° *Dans chaque ligne, la somme des nombres de rang pair, à partir de la gauche, est égale à la somme des nombres de rang impair.*

Considérons, par exemple, les nombres de la 5e ligne. Soit S la somme des nombres de rang impair et S′ la somme des nombres de rang pair. On a :

$$S=1+e+1,$$
$$S'=d+f.$$

Or, $e=b+c$ et $d=b+1$, $f=1+c$,

d'où $S=1+b+c+1$

et $S'=1+b+c+1.$

On a bien $S=S'$.

4° *Un nombre quelconque du triangle est égal à la somme des nombres de la colonne précédente et compris dans les lignes précédentes.*

Considérons, par exemple, le nombre e.

On a : $e=c+b.$

Mais $c=a+1,$

d'où $e=b+a+1.$

5° *Un nombre quelconque du triangle est égal à la somme des nombres placés sur la ligne parallèle à l'hypoténuse et partant du nombre placé au-dessus de lui pour remonter au nombre* 1.

Considérons encore le nombre e, par exemple.

On a : $e=c+b.$

Mais $b=a+1,$

d'où $e=c+a+1.$

Les carrés magiques.

Considérons des nombres rangés en carré de telle façon que la somme des nombres inscrits dans chaque ligne horizontale, dans chaque colonne verticale et dans chaque diagonale soit la même; on obtient ainsi un *carré magique*.

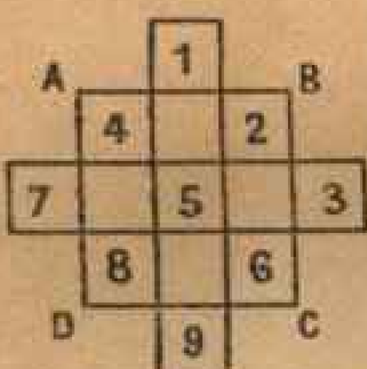
Ainsi les 9 premiers nombres permettent de former le carré ci-contre :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

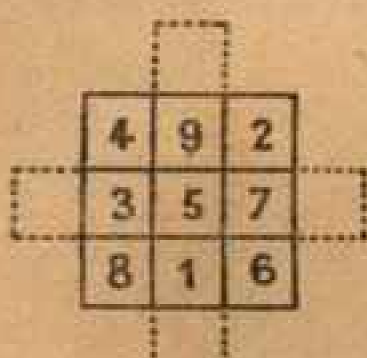
Dans chaque colonne, dans chaque ligne et dans chaque diagonale la somme des nombres inscrits est 15.

Carrés magiques d'ordre impair (nombre impair de termes par rangée). — Il existe plusieurs méthodes pour les former, nous indiquerons simplement celle de Bachet de Méziriac.

Ainsi, pour le carré de 3, on formera le tableau (1) avec les 9 premiers nombres, puis on complétera le carré ABCD en portant dans les cases vides les nombres qui sont à l'extérieur sur la même ligne ou la même colonne, et chaque nombre remplissant la case qui est la plus éloignée de lui. On obtient le carré ABCD de la figure (2).



(1)



(2)

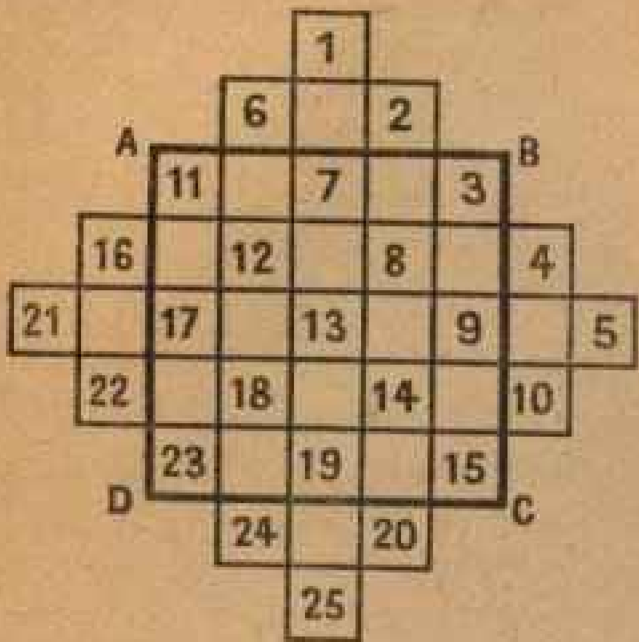
Pour le carré de 5 et les autres d'ordre impair, on peut opérer d'une façon analogue.

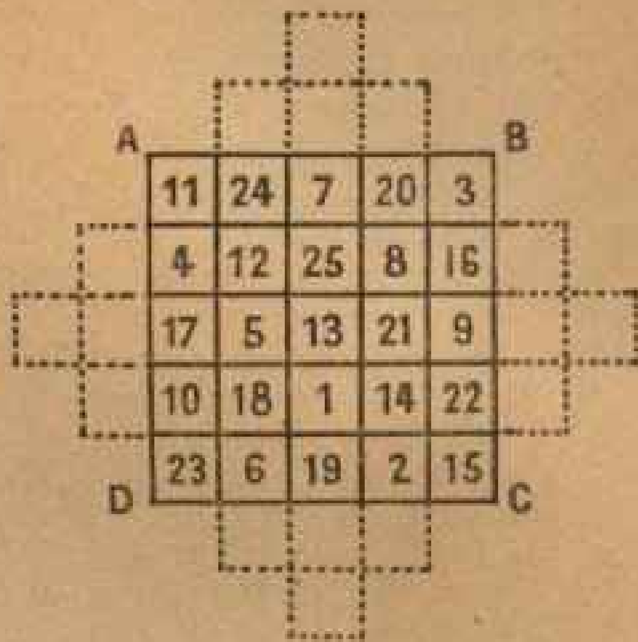
Le problème comporte d'ailleurs un grand nombre de solutions. On peut construire des milliers de carrés magiques d'ordre 5.

— Dans un carré magique d'ordre n formé avec la suite des nombres entiers, il y a n^2 nombres. La somme de tous ces nombres est $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ et, par suite, la somme pour chaque colonne est

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2n} \text{ ou } \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Ainsi pour le carré de 5, cette somme est $\frac{5 \times 26}{2} = 65.$





Carrés magiques d'ordre pair. — Ils se forment de différentes manières. Par exemple prenons le carré d'ordre 4 et proposons-nous de le former avec les 16 premiers nombres.

Nous écrirons d'abord ces 16 nombres comme il est indiqué ci-contre.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(1)

La somme totale des nombres est $\frac{16\,(16+1)}{2}$ et, par suite, la somme des nombres dans chaque ligne, dans chaque colonne, etc., est

$$\frac{4\,(16+1)}{2} = 34.$$

Les diagonales nous donnent déjà la somme 34.

Permutons la première et la 4ᵉ ligne et aussi la 2ᵉ et la 3ᵉ en ayant soin de ne pas toucher aux nombres situés dans les diagonales, nous obtenons le tableau (2) puis, opérons de même pour les colonnes et nous obtenons le tableau 3 qui constitue le carré magique cherché.

1	14	15	4
9	6	7	12
5	10	11	8
13	2	3	16

(2)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(3)

C'est ce carré magique que le peintre A. Durer de Nuremberg a gravé sur une tablette en bois vers l'an 1500 avec le titre *Mélancolie*.

— Il existe d'autres carrés magiques formés avec les 16 premiers nombres.

Propriétés des carrés magiques. — Si un carré magique comprend tous les nombres de 1 à a^2, le carré est d'ordre a, la constante correspondante est $\frac{1}{2}a(a^2+1)$; un carré magique d'ordre 4 a pour constante 34.

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

On peut remarquer que lorsqu'un carré magique est construit, on peut ajouter ou retrancher un même nombre à tous les termes du carré, le carré reste magique.

Dans ces conditions, avec le carré magique d'ordre 3 comprenant les 9 premiers nombres, on peut former une infinité de carrés magiques en utilisant 9 nombres consécutifs.

De même, on peut multiplier tous les nombres formant un carré magique par un même nombre, le carré restera magique.

Si donc on prend, par exemple, le carré magique comprenant les 9 premiers nombres, on pourra en déduire une infinité de carrés magiques de 9 nombres en progression arithmétique.

— Nous arrêterons là l'énumération des propriétés relatives aux carrés magiques et nous nous contenterons d'en indiquer quelques-uns. Certains carrés peuvent ne pas avoir les diagonales magiques, on les appelle *semi-magiques*.

11	20	24	3	7
4	8	12	16	25
17	21	5	9	13
10	14	18	22	1
23	2	6	15	19

Les *carrés diaboliques* ou *panmagiques* sont des carrés magiques qui jouissent de propriétés plus étendues que ceux-ci : Les *directions* des diagonales sont encore magiques. Ainsi le carré ci-contre est un carré diabolique. Une direction parallèle aux diagonales dans un carré magique d'ordre n est composée de l'ensemble des cases $n - a$ prises d'un côté de la diagonale et de a prises de l'autre côté.

Le carré nous donne :

$11+8+5+22+19=4+21+18+15+7=17+14+6+3+25$ $=$ etc.

Dans un tel carré, on peut enlever *n* colonnes d'un côté, les porter de l'autre, le carré reste magique.

1	2	19	20	23
18	16	9	14	8
21	11	13	15	5
22	12	17	10	4
3	24	7	6	25

Il y a encore les carrés hypermagiques, bimagiques, trimagiques, carrés magiques à enceintes, à croix, à châssis, à compartiments, les cercles magiques, etc.

Nous donnons ci-contre un exemple de *carré magique* avec enceinte, c'est-à-dire un carré magique entouré d'une enceinte de façon que le tout forme encore un carré magique.

SOPHISMES, PARADOXES ET PROBLÈMES AVEC FAUTE CACHÉE

Les *sophismes* sont de faux raisonnements présentant toutefois l'apparence de raisonnements corrects.

Zénon d'Élée qui fut un des philosophes remarquables de la Grèce antique (il est né 485 ans avant notre ère) est l'auteur des deux sophismes ci-dessous qui, à cette époque, et même dans la suite, ont prêté à maintes discussions.

Achille et la tortue. — *Achille va dix fois plus vite qu'une tortue qui a un stade* (1) *d'avance, Achille rattrapera-t-il la tortue?*

Non, disait Zénon, car, pendant qu'Achille parcourt un stade, la tortue en parcourt $\frac{1}{10}$, pendant qu'Achille parcourt ce $\frac{1}{10}$, la tortue en parcourt $\frac{1}{100}$, et ainsi de suite. Il s'écoulera donc une infinité d'instants avant qu'Achille rejoigne la tortue et, par suite, il ne l'atteindra jamais.

La flèche qui vole. — *Une flèche se déplace d'une façon continue et régulière, va-t-elle atteindre son but?*

Non, disait Zénon, pour atteindre le but, il lui faut d'abord parcourir la moitié du chemin qui la sépare de ce but, puis elle devra parcourir la moitié du chemin qui reste, puis la moitié du nouveau chemin restant, et ainsi de suite; elle mettra une infinité de moments, elle ne pourra donc atteindre son but.

Dans le problème d'Achille, il y a évidemment une infinité d'instants avant qu'Achille atteigne la tortue, mais ces instants deviennent de plus en plus petits et tendent vers zéro.

(1) Mesure de 500 pieds grecs de 0 m. 30.

Mathématiquement,

Si Achille met un temps t minutes pour parcourir le premier stade, pendant ce temps la tortue a parcouru $\frac{1}{10}$ de stade; Achille parcourt ce dixième de stade en $\frac{t}{10}$ minutes, puis un centième en $\frac{t}{10^2}$, ... etc.

Pour rattraper la tortue, il met un temps

$$t + \frac{t}{10} + \frac{t}{10^2} + \ldots\ldots$$

Nous avons à effectuer la somme des termes d'une progression géométrique illimitée dont la raison $\frac{1}{10}$ est inférieure à 1.

On sait que la somme de ces termes est :

$$\frac{t}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10\,t}{9}.$$

Or, en une minute, Achille parcourt $\frac{1}{10}$ de stade, au bout du temps $\frac{10t}{9}$ il aura parcouru $\frac{1}{10} \times \frac{10t}{9} = \frac{t}{9}$ stades.

Si Achille met 10 minutes par exemple pour parcourir un stade, il rattrapera la tortue après avoir parcouru $\frac{10}{9}$ de stade ou 1 stade $\frac{1}{9}$.

— Si on donne une des vitesses, il est inutile pour traiter le problème de recourir à la progression géométrique.

Si Achille a, par exemple, une vitesse de 1 stade à la minute, la tortue a pour vitesse, à la minute, $\frac{1}{10}$ de stade.

En une minute, Achille rattrape $\frac{9}{10}$ de stade et pour rattraper un stade, il met un temps égal à $\frac{10}{9}$ de minute.

Il aura donc parcouru $\frac{10}{9}$ de stade, soit 1 stade $\frac{1}{9}$.

— Pour la flèche qui vole, on peut faire un raisonnement identique.

— Démocrite s'occupa aussi de ces infiniment petits et n'hésitait pas à dire que si l'on admet que deux sections planes d'un cône, faites par des plans parallèles infiniment voisins, sont égales, tous les cônes sont des cylindres.

Ce fut Aristote (382 à 324 avant l'ère chrétienne), dans sa *Physique*, qui étudia plus à fond ces questions d'infiniment petits et qui montra que la continuité des changements est un phénomène se rattachant intimement à la nature du temps, du mouvement et de l'espace.

Paradoxes. — Les paradoxes mathématiques sont constitués par des résultats notoirement faux qui semblent résulter de démonstrations rigoureuses, mais au cours desquelles on a négligé d'appliquer certains principes, ou encore effectué une opération qui n'a pas de sens. Ainsi par exemple, la division d'un nombre ou d'une expression par zéro n'a aucun sens; si l'on divise les deux membres d'une égalité par une expression qui est nulle, les quotients obtenus ne sont pas forcément égaux.

Il existe aussi des paradoxes dans d'autres branches des mathématiques, par exemple en géométrie. Ils proviennent d'un raisonnement erroné ou encore d'une construction géométrique dont le tracé n'est pas correct.

Paradoxes arithmétiques et algébriques.

Premier paradoxe : 1 = 2. Considérons deux nombres a et b égaux, écrivons $a = b$,

On en déduit : $$ab = a^2$$

et $$ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

L'égalité s'écrit : $b(a - b) = (a + b)(a - b)$.

En divisant les deux membres par $a - b$, on a :

$$b = a + b \text{ ou } b = 2b \text{ puisque } a = b.$$

Il en résulte que $1 = 2$.

Ce résultat paradoxal s'explique facilement :

On peut diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre, *à condition que ce nombre soit différent de zéro*. Or, nous avons divisé les deux membres de l'égalité par $a - b$ qui est une quantité nulle, le résultat obtenu conduit à une absurdité.

Deuxième paradoxe. — *Tous les nombres sont égaux entre eux.* — Désignons par c la différence de deux nombres quelconques a et b.

On a : $$a - b = c.$$

Multiplier les deux membres par $a - b$,

$$(a - b)^2 = c\,(a - b)$$

ou $$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

ou $$a\,(a - b - c) = b\,(a - b - c).$$

En divisant les deux membres par $a - b - c$, on a :

$$a = b.$$

Les nombres a et b pris quelconques sont égaux.

— L'explication de ce paradoxe est la même que pour le précédent : on a divisé les deux membres de l'égalité (1) par l'expression $a - b - c$ qui est nulle.

Troisième paradoxe (1). — *Démontrer que* $2 = 3$.

On a : $$4 - 10 = 9 - 15.$$

Ajoutons $\frac{25}{4}$ aux deux membres, on a :

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$$

ou $$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

En extrayant la racine carrée des deux membres,

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

On en déduit $2 = 3$.

— L'explication de ce paradoxe est simple :

De l'égalité $a^2 = b^2$, on ne déduit pas forcément $a = b$, mais soit $a = b$, si a et b sont de même signe ; soit $a = -b$, si a et b sont de signes contraires.

(1) *Premiers principes d'algèbre* de Laisant et Perrin.

Il importe de ne pas oublier le double signe.

Dans l'exercice précédent, l'extraction correcte de la racine donne :
$$2-\frac{5}{2}=-\left(3-\frac{5}{2}\right),$$
c'est-à-dire :
$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Quatrième paradoxe. — *Deux nombres différents sont égaux.* — a et b étant deux nombres tels que $a \neq b$; c leur moyenne arithmétique :
$$a+b=2c.$$

On en déduit :

$(a+b)(a-b)=2c(a-b)$ ou $a^2-b^2=2ac-2bc.$

On peut écrire :

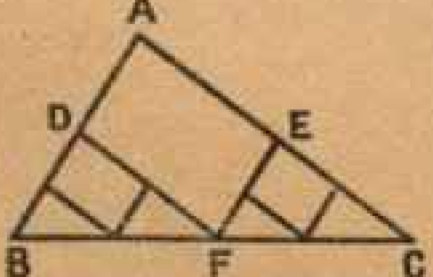
$a^2-2ac=b^2-2bc$ et $a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$, c'est-à-dire $(a-c)^2=(b-c)^2$.

En extrayant la racine carrée des deux membres,
$$a-c=b-c \text{ ou } a-b=0, \text{ c'est-à-dire } a=b.$$

L'erreur est dans l'extraction de la racine; le raisonnement correct conduit à : $a-c=-(b-c)$.

Les côtés d'un triangle. — *Chaque côté d'un triangle est égal à la somme des deux autres.*

Considérons le triangle ABC, prenons les milieux D, E, F des trois côtés, joignons DF et EF. A cause du parallélogramme formé, on a évidemment :



$$BD+DF+FE+EC=AB+AC.$$

En effectuant une construction semblable pour les triangles BDF et FEC, puis en continuant de la sorte indéfiniment, on obtient une ligne brisée dont les côtés sont de plus en plus petits et la somme de ces côtés est toujours égale à AB + AC.

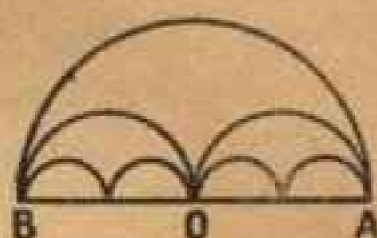
A la limite le périmètre de la ligne brisée se confond avec BC et par suite BC serait égal à AB + AC.

La demi-circonférence et le diamètre. — De par un raisonnement analogue, on établirait qu'*une demi-circonférence est égale à son diamètre.*

On tracera la demi-circonférence de diamètre AB, et de centre O; puis deux demi-circonférences ayant pour diamètres les rayons OB et OA.

La première demi-circonférence a pour longueur πR, la somme des deux autres est $\frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{2} = \pi R$, elle est donc égale à la première demi-circonférence. En continuant la même construction indéfiniment, on a toujours la même somme à chaque construction. Les demi-circonférences deviennent de plus en plus petites et viennent se confondre avec AB.

— Ces paradoxes sont fournis par un raisonnement faux : Si l'on considère un nombre limité de quantités variables, si chacune de ces quantités tend vers zéro, la somme tend évidemment vers zéro, mais il n'en est pas forcément de même si le nombre de ces quantités est infini. Ainsi, si l'on partage un carré en un certain nombre de carrés égaux et que l'on suppose que le nombre de ces carrés devienne infiniment grand, de façon que chacun de ces carrés devienne infiniment petit, la somme des aires de ces carrés n'est pas nulle mais reste égale à l'aire du carré primitif.

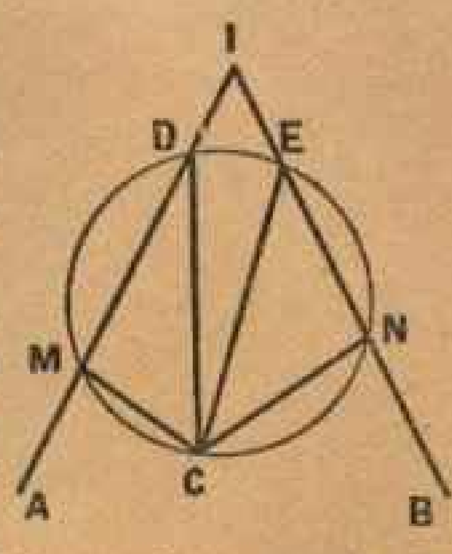


La circonférence qui a deux centres. — Considérons un angle AIB; prenons sur les côtés 2 points M et N et élevons en ces points des perpendiculaires respectives sur les côtés.

Soit C leur point de rencontre.

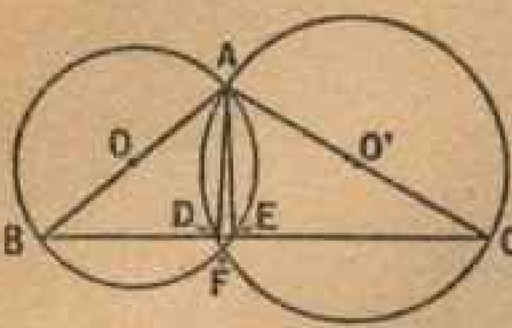
Par les points M, C, N, faisons passer un cercle qui coupe les côtés de l'angle aux points D, E.

CD est un diamètre du cercle puisque $\widehat{CMD} = 1$ droit. Il en est de même de CE. Le cercle a deux diamètres distincts passant par C et par suite deux centres distincts.



— On voit immédiatement l'erreur. Le cercle passant par MCN passe évidemment par I. IC est son diamètre.

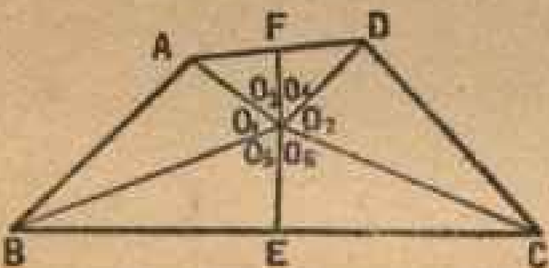
D'un point extérieur à une droite, on peut abaisser deux perpendiculaires sur la droite. — Considérons deux circonférences de centres O et O′ qui se coupent en A et F. Traçons les diamètres AB et AC puis joignons BC qui coupe les cercles en D et E. Joignons AE et AD.



L'angle ADB inscrit dans un demi-cercle est droit, il en est de même de l'angle CEA. Donc AD et AE sont perpendiculaires sur BC.

— On voit tout de suite que le tracé est faux. La droite BC passe par F.

Tout quadrilatère convexe qui a deux côtés opposés égaux est un trapèze isocèle. — Considérons le quadrilatère convexe ABCD dans lequel AB = CD. Au point E, milieu de BC, élevons la perpendiculaire sur BC; au point F, milieu de AD, élevons la perpendiculaire sur AD. Ces deux droites se coupent en un point O (si BC et AD ne sont pas parallèles auquel cas le théorème serait démontré).



Joignons OA, OB, OC, OD ; on a évidemment OB = OC et OA = OD, car ce sont, deux à deux, des obliques dont les pieds sont équidistants du pied de la perpendiculaire. Il en résulte que les deux triangles OAB et OCD sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux chacun à chacun; donc $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. D'autre part, les triangles BOC et AOD sont isocèles, les hauteurs sur les bases sont des bissectrices des angles au sommet,

$$\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \quad \widehat{O}_5 = \widehat{O}_6.$$

On a donc : $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_5 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 + \widehat{O}_6$

et comme la somme de tous ces angles égale 4 droits

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_5 = 2 \text{ droits},$$

donc EOF est une ligne droite et les côtés BC et AD qui sont perpendiculaires sur cette droite sont parallèles. Le quadrilatère est bien un trapèze isocèle.

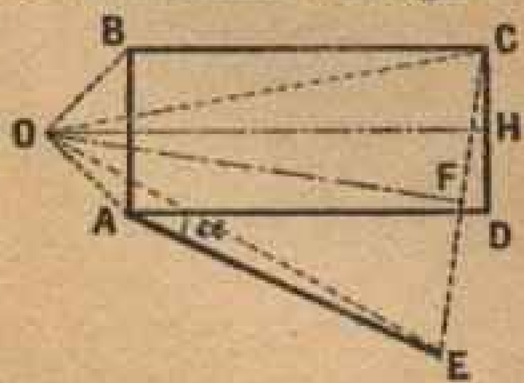
Le paradoxe s'explique aisément.

Le tracé de la construction faite est faux; les perpendiculaires en E et F se rencontrent toujours hors du quadrilatère.

Un angle obtus est égal à un angle droit. — Considérons le rectangle ABCD.

Traçons un segment AE = AD faisant avec AD un angle α.

Élevons la perpendiculaire sur DC en son milieu H puis la perpendiculaire sur CE en son milieu F. Ces deux droites se coupent en un point O.



Joignons OA, OB, OC et OE.

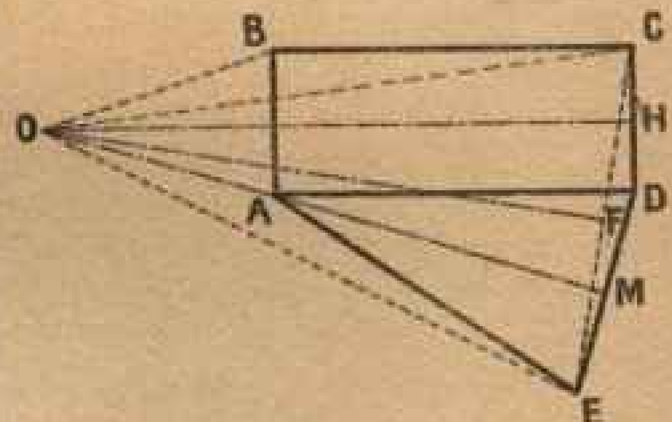
On a évidemment OA = OB (obliques dont les pieds sont équidistants du pied I de la perpendiculaire). De même OC = OE.

Il en résulte que les triangles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OAE}$ sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux chacun à chacun. Donc $\widehat{OBC} = \widehat{OAE}$, mais on a $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BAE}$ et la proposition se trouve établie, puisque $\widehat{ABC} = 1$ droit et $\widehat{BAE} > 1$ droit.

— L'erreur provient de la construction indiquée.

Reprenons-la.

Le point O, d'après l'hypothèse, est équidistant de C, de D et de E puisqu'il se trouve à la rencontre de la perpendiculaire en H sur DC et de la perpendiculaire en F sur CE. Il en résulte que ce point O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de ED et qui passe évidemment par le point A. Les triangles considérés OBC et OAE qui sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux ont la position indiquée par la figure 2 et l'on a $\widehat{OBC} = \widehat{OAE}$ ce qui n'a rien d'anormal.

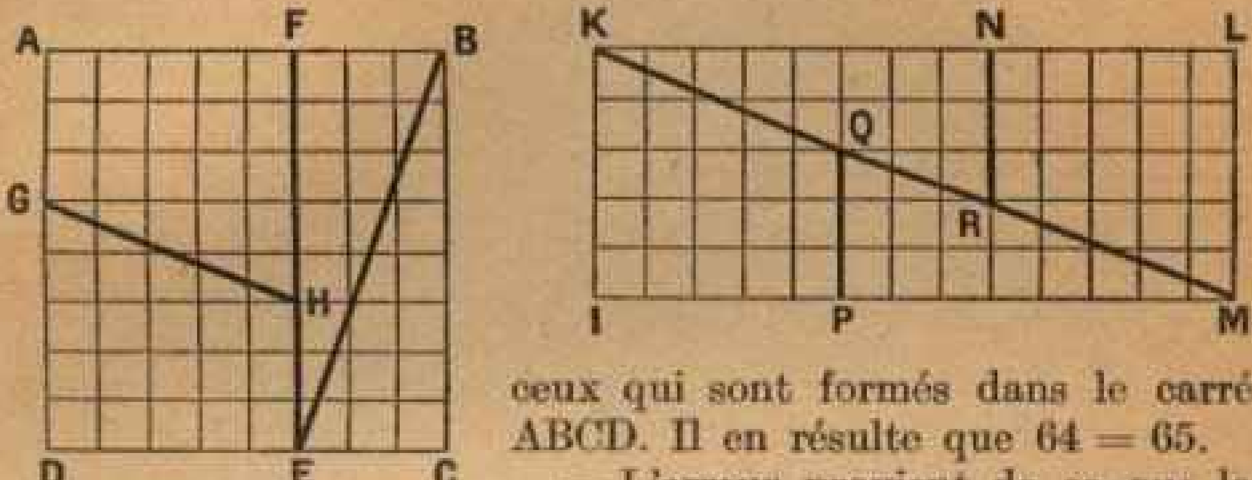


64 égale 65. — Ce paradoxe est indiqué par Ozanam qui prend comme exemple « 33 égale 34 ». L'erreur commise est plus visible que si l'on veut établir (de la même façon) que $64 = 65$.

Considérons un carré ABCD et partageons-le en 64 carrés égaux.

Partageons-le en 2 triangles rectangles égaux EFB et EBC et en 2 trapèzes égaux AFHG et GHED.

Découpons le carré suivant les droites EB, EF et GH et disposons le tout comme l'indique le rectangle ci-joint. Ce rectangle renferme $13 \times 5 = 65$ carrés et ces carrés sont égaux à



ceux qui sont formés dans le carré ABCD. Il en résulte que $64 = 65$.

— L'erreur provient de ce que la juxtaposition dans la seconde figure ne s'effectue pas complètement comme il est indiqué.

La ligne KQ, par exemple, provient de GH dont la pente sur l'horizontale est $\frac{2}{5}$, de même KR qui provient de EB a pour pente $\frac{3}{8}$; d'autre part la diagonale KM a pour pente $\frac{5}{13}$.

Les droites KQ, QM, RM ne coïncident pas avec la diagonale et la partie du rectangle IKLM non couverte par les 4 figures juxtaposées correspond exactement, comme surface, à un des petits carrés.

Paradoxe : 0 = 2. — La trigonométrie nous donne $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sin}^2 x$, quel que soit l'arc x.

En extrayant la racine carrée des deux membres puis en élevant les deux membres de l'égalité obtenue au cube, on a :

$$\text{Cos}^3 x = \left(\sqrt{1 - \text{Sin}^2 x}\right)^3.$$

Faisons dans cette égalité $x = \pi$, on obtient :

$$-1 = 1 \text{ ou } 0 = 2.$$

— Ce paradoxe s'explique aisément :

De $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sin}^2 x$, on déduit $\text{Cos}\, x = \pm\sqrt{1 - \text{Sin}^2 x}$.

Si l'on élève au cube, c'est le signe — qu'il faudra prendre devant le radical dans le cas où $x = \pi$.

On peut évidemment compliquer un peu de façon à établir une autre égalité fausse. Par exemple $2 \times 2 = 8$.

On reprendra l'égalité

$$\operatorname{Cos}^2 x = \left(\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x}\right)^2.$$

Ajoutons 3 aux deux membres et multiplions chacun des membres de l'égalité obtenue par 2, on obtient :

$$(\operatorname{Cos}^2 x + 3)\,2 = (\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x}^2 + 3)\,2.$$

Pour $x = \pi$, on a : $2 \times 2 = 4 \times 2$.

Toutes les circonférences sont égales. — Si l'on fait rouler un cercle sur un plan, sans glissement, de façon que sa circonférence décrive une ligne droite, on obtiendra ainsi un segment rectiligne AA′ qui sera le développement de la circonférence. Imaginons un autre cercle concentrique et lié invariablement au premier (comme le moyeu d'une roue).

Quand la circonférence sera développée, le rayon OA est venu en O′A′, mais le rayon OB est venu en O′B′ et la petite circonférence s'est développée suivant BB′. Or AA′ = BB′, donc toutes les circonférences sont égales.

Ce paradoxe qui avait fort intrigué les anciens a été expliqué pour la première fois par de Mairan, successeur de Fontenelle à l'Académie des Sciences. Il montra que la petite roue n'est pas seulement animée d'un mouvement de rotation mais qu'elle possède aussi un mouvement de glissement qui intervient à chaque instant, de sorte que BB′ ne correspond pas du tout au développement de la petite circonférence.

Problèmes avec faute cachée.

Les bottes d'asperges. — *Un maître d'hôtel a acheté, pour une certaine somme, la quantité d'asperges que pouvait contenir un cordeau d'un pied ; le lendemain, voulant en avoir le double, il retourne au marché avec un lien double et il offre un prix double. Son offre est-elle raisonnable ?*

(Ozanam.)

Ce qu'il importe de considérer est la surface des cercles formés par chacune des ficelles.

Soit l la longueur de la ficelle dans le premier cas.

Le rayon de la circonférence formée par cette ficelle est $\frac{l}{2\pi}$ et la surface correspondante est $\pi \times \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$.

La longueur de l'autre ficelle est $2l$, le rayon correspondant est $\frac{2l}{2\pi} = \frac{l}{\pi}$ et la surface du cercle $\pi \times \frac{l^2}{\pi^2} = \frac{l^2}{\pi}$.

Cette surface est 4 fois plus grande que la première.

On pourrait dire plus rapidement que les aires de deux cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons ou aux carrés des longueurs de leurs circonférences.

En somme, pour qu'il y ait équivalence, la petite botte étant vendue a f., il faudrait vendre l'autre $4\,a$ f.

L'offre du maître d'hôtel n'est pas raisonnable.

Les sacs de blé. — *Un particulier a emprunté un sac de blé de 4 pieds de haut et de 6 pieds de tour ; l'emprunteur envoie au prêteur deux sacs de même hauteur que le précédent et de 3 pieds de tour chacun. On demande s'il a rendu la même quantité de grains.*

(OZANAM.)

Il ne rend que la moitié de ce qu'il a emprunté. On le montrera comme au problème précédent.

La balance fausse. — *Un commerçant utilise, pour servir ses clients, une balance fausse dont les bras sont inégaux. Pour un premier client, il place ses masses marquées dans l'un des plateaux ; pour un second client désirant la même masse de marchandise, il met ses masses marquées dans l'autre plateau. Dans l'ensemble, a-t-il perdu ou gagné ?*

(W. ROUSE-BALL.)

Soient a et b les longueurs des bras du fléau.

Soit p la masse marquée qu'il utilise.

Dans le premier cas, la masse pesée est q telle que l'on ait :

$$pa = qb, \text{ d'où } q = \frac{pa}{b}.$$

Dans le second cas, la masse pesée est q' telle que l'on ait :

$$pb = q'a, \text{ d'où } q' = \frac{pb}{a}.$$

Il a livré, en tout, la masse :

$$\frac{pa}{b}+\frac{pb}{a}=p\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right),$$

et il s'est fait payer la masse $2p$.

Or, on sait que l'on a toujours $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ parce que $a^2+b^2>2ab$; il a donc livré une masse supérieure à $2p$ et, par suite, il perd.

Un héritage difficile à partager. — *Un arabe, en mourant, laisse, par testament, sa fortune à ses trois neveux, à condition que l'aîné en prendra la moitié, le second le tiers et le troisième le neuvième. Or, cette fortune se compose de 17 chameaux. Comment doit-on faire le partage?*

(Exercice d'origine arabe.)

Les neveux se seraient probablement disputés pendant longtemps s'ils n'avaient eu recours à un vieux sage qui les mit complètement d'accord.

« Prenez un chameau sous ma tente, leur dit-il, et ajoutez-le aux vôtres, cela fait 18.

« Toi, dit-il à l'aîné, tu en désires la moitié, prends-en 9 », et l'aîné s'en fut content puisque sa part était moindre que 9.

« Tu en désires le tiers, dit-il au second, prends-en 6 », et celui-ci s'en fut content pour la même raison que l'aîné.

« Quant à toi, dit-il au plus jeune, qui as droit au neuvième, prends-en 2 », et celui-ci s'en fut également content toujours pour la même raison.

« Alors, conclut le vieillard, $9+6+2=17$. Mon chameau me reste, rentrez-le sous ma tente. »

— L'anomalie n'est qu'apparente et s'explique facilement : Quand on partage une grandeur en plusieurs fractions, la somme de ces fractions doit évidemment être égale à 1. Or,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}.$$

L'oncle avait mal fait le partage; en ajoutant $\frac{1}{18}$, c'est-à-dire en l'espèce, un chameau, le juge savait bien que les neveux ne prendraient que les $\frac{17}{18}$ du tout et que son bien lui resterait.

La salle de police et les hommes punis. — *Une salle de police est composée de 9 cellules dont celle du milieu est occupée par un adjudant chargé de la surveillance. Celui-ci avant de se coucher fait une première visite ; il trouve 3 hommes dans chaque cellule, ce qui fait 9 sur chaque bande (tableau I).*

I

3	3	3
3		3
3	3	3

Dans une seconde visite, il trouve encore 9 hommes sur chaque bande (tableau II) et tranquillisé, il retourne se coucher. Pourtant 4 hommes sont sortis.

II

4	1	4
1		1
4	1	4

Dans une troisième visite, il retrouve encore 9 hommes sur chaque bande (tableau III) et cependant les 4 hommes sont rentrés et ont ramené avec eux 4 de leurs camarades.

III

2	5	2
5		5
2	5	2

Dans une quatrième visite, l'adjudant est encore rassuré (tableau IV), 9 hommes sont sur chaque bande et pourtant, 4 nouveaux camarades sont entrés.

IV

1	7	1
7		7
1	7	1

L'adjudant fait encore deux visites et se trouve rassuré en comptant toujours 9 hommes sur chaque bande et pourtant, la première fois (tableau V) 4 nouveaux camarades étaient entrés et la seconde fois (tableau VI) tous les camarades entrés étaient partis, emmenant avec eux six des hommes punis.

(D'après Bachet de Méziriac.)

V

0	9	0
9		9
0	9	0

VI

5	0	4
0		0
4	0	5

— On voit tout de suite d'où provient l'illusion de l'adjudant ; en comptant par bande, il compte deux fois les cases des angles. En chargeant les cases des coins et diminuant celles du milieu, le nombre reste toujours le même sur chaque bande mais le nombre total se trouve diminué ; le contraire se produit si on charge les cases du milieu et que l'on vide les cases angulaires.

Problème impossible. — *Un gamin possède un certain nombre de billes, il en donne 50 à un camarade, celui-ci lui en redonne 100 et, en définitive, il en possède 60. Combien en avait-il au début ?*

Si x est le nombre de billes qu'il avait au début, on peut écrire : $x - 50 + 100 = 60$. On en déduit : $x = 10$.

Cette solution n'est pas acceptable, il ne pouvait en donner 50 à un camarade.

INDEX ALPHABÉTIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Imp. Larousse, 1 à 9, rue d'Arcueil, Montrouge (Seine). — R. C. Seine 34.426.
IMPRIMÉ EN FRANCE (*Printed in France*)
851-3-39.

EXTRAIT DU CATALOGUE DE LA LIBRAIRIE LAROUSSE

13 à 21, rue Montparnasse, et 114, boulevard Raspail
Paris (6e) — R. C. Seine 84 426

Le catalogue général de la Librairie Larousse et les prospectus des principales publications sont envoyés gratis et franco sur demande.

Dictionnaires Larousse

encyclopédiques et illustrés

○ ○ ○

Les *Dictionnaires Larousse* sont aujourd'hui universellement connus. Partout on s'accorde à les considérer comme les meilleurs des dictionnaires et, peut-on dire, comme les types mêmes du genre. A l'heure actuelle, où les conditions de la vie nous obligent plus que jamais à avoir sur toutes choses des idées précises et des renseignements exacts, ce sont des ouvrages qui ont leur place marquée dans tous les foyers. Il existe des éditions de tous prix et de tous genres, dont l'ensemble constitue une série unique au monde : *des dictionnaires encyclopédiques généraux* en un ou plusieurs volumes, *des dictionnaires spéciaux* répondant à tous les besoins de l'existence, et une collection de *dictionnaires en deux langues*, de petit format, mais plus pratiques et plus complets que les ouvrages de mêmes dimensions publiés jusqu'ici.

Dictionnaires Encyclopédiques Généraux

Larousse du XXe siècle, *en six volumes* grand in-4° (32 × 25), publié sous la direction de Paul Augé. Le *Larousse du XXe siècle*, dont la nécessité se faisait vivement sentir après les bouleversements et les progrès du dernier quart de siècle, est le grand dictionnaire encyclopédique de notre temps. On y trouve *toute la langue française* avec ses innombrables ressources et ses plus récentes acquisitions, *toutes les connaissances du passé et du présent*, jusqu'aux faits récents, jusqu'aux théories, inventions et découvertes de notre époque. L'ouvrage contient 235 640 articles, 46 641 gravures, 502 cartes et 364 planches en noir et en couleurs. — ***Immense succès : plus de 130 000 souscripteurs à l'heure actuelle.***

(***Demander le fascicule spécimen et les conditions de souscription.***)

EN VENTE CHEZ TOUS LES LIBRAIRES

Dictionnaires Encyclopédiques Généraux
(Suite)

Larousse Universel, *en deux volumes*, publié sous la direction de Claude AUGÉ. Tout le savoir humain condensé sous une forme concise et claire. Deux volumes (ft 21 × 30,5 cm.), 128 416 articles, 27 000 gravures, 184 planches et cartes en noir et en couleurs. (*Demander le fascicule spécimen avec prix et conditions.*)

Nouveau Petit Larousse illustré. Le plus complet des dictionnaires manuels. 1 775 pages (13,5 × 20 cm.), 6 200 gravures, 300 planches, cartes et tableaux.

Larousse classique illustré. 1 116 pages (13,5 × 20 cm.), 4 150 gravures, 170 planches, 114 cartes.

Larousse élémentaire illustré. 1 275 pages (10,5 × 16,5), 2 500 gravures, 37 planches, 24 cartes.

Dictionnaire illustré de la langue française. 952 pages (10,5 × 16,5), 1 900 gravures, 37 tableaux.

Petit Dictionnaire français Larousse. 820 pages (13,5 × 10 cm.), 20 tableaux et cartes.

Larousse de poche. 1 304 pages, *papier bible* (10,5 × 16,5 cm.).

Dictionnaires méthodiques de la langue française

Dictionnaire analogique, par Ch. MAQUET. Répertoire moderne des idées par les mots et des mots par les idées. Un vol. (13,5 × 20 cm.).

Dictionnaire synoptique d'Etymologie française, par Henri STAPPERS, donnant la dérivation des mots usuels, classés sous leur racine commune. Un volume (11 × 18 cm.), 960 pages.

Vocabulaire par l'image de la langue française, par A. PINLOCHE. Attrayante et originale méthode pour l'acquisition du vocabulaire français. Un volume (16 × 23 cm.), 6 000 figures avec légendes.

Dictionnaire méthodique et pratique des Rimes françaises, par Ph. MARTINON. Un volume (11 × 18 cm.), 300 pages.

Dictionnaires Encyclopédiques Spéciaux

Larousse commercial, publié sous la direction de E. CLÉMENTEL. Tous les renseignements indispensables dans la vie des affaires. Un volume de 1 350 pages (20 × 27 cm.), 1 020 gravures, 19 planches en couleurs.

Larousse de l'Industrie et des Arts et Métiers, publié sous la direction de L. GUILLET. Grandes et petites industries, techniques, production. 1 280 pages (20 × 27 cm.), 1 275 gravures, 50 planches en noir et en couleurs.

Larousse médical illustré. Encyclopédie d'hygiène et de médecine à l'usage du grand public. Un volume de 1 400 pages (20 × 27 cm.), 2 414 gravures, 36 hors-texte en couleurs, etc.

Dictionnaires Encyclopédiques Spéciaux
(Suite)

Larousse ménager. Encyclopédie de la vie domestique. Un volume de 1 260 pages (20×27 cm.), 2 112 gravures, 27 planches hors texte en noir et 21 planches en couleurs.

Larousse gastronomique, par P. MONTAGNÉ. *En cours de publication. Demander le prospectus spécimen.*

Larousse agricole illustré, *en deux vol.* L'ouvrage le plus pratique et le plus largement conçu. Deux volumes (32×25 cm.), 1 700 pages, 5 216 gravures, 40 hors-texte en couleurs.

Dictionnaire illustré d'Art et d'Archéologie, par L. RÉAU. Vocabulaire historique et technique de tous les arts. Un volume (15×21 cm.), 656 gravures, 16 hors-texte.

Dictionnaire usuel de Droit, par Max LEGRAND. *Supplément* 1934. Toutes les questions de droit par ordre alphabétique et à la portée du grand public. Un volume de plus de 1 100 pages (15×21 cm.).

Dictionnaire illustré de Médecine usuelle. Notions essentielles. Un volume (15×21 cm.), 991 gravures.

Dictionnaires en deux langues

Dictionnaire français-anglais et anglais-français. Relié pleine toile.

Dictionnaire français-allemand et allemand-français. Relié pleine toile.

Dictionnaire français-espagnol et espagnol-français. Relié pleine toile.

Dictionnaire français-italien et italien-français. Relié pleine toile.

Mémentos et Encyclopédies

Grand Mémento encyclopédique Larousse, *en deux volumes (en cours de publication).* A côté des grands dictionnaires Larousse, établis selon l'ordre alphabétique, le *Grand Mémento* donnera un exposé des connaissances humaines méthodique et par ordre de matières : lettres, arts, sciences, vie pratique, etc. Il formera deux superbes volumes de plus de 1 000 pages chacun (21×30,5 cm.), illustrés de milliers de gravures et de nombreux hors-texte en couleurs et en héliogravure. Le Tome Ier est paru; le Tome II paraîtra en 1937. (*Demander le prospectus spécimen.*)

Mémento Larousse. Toutes les connaissances d'utilité journalière. (*Vingt ouvrages en un seul.*) Beau volume de 730 pages (13,5×20 cm.), 900 gravures, 50 cartes en couleurs.

L'Encyclopédie française permanente, *en vingt et un volumes,* publiée sous la direction de L. FEBVRE, professeur au Collège de France. *Reconnue d'utilité publique.* Dans l'ordre méthodique, un bilan de la civilisation actuelle, une vue synthétique du monde et de la science. Volumes parus (juin 1937) : *La Vie* (tome IV); *L'Etre humain* (Tome VI); *L'Espèce humaine* (tome VII); *L'Etat moderne* (tome X); *Arts et Littératures dans la société contemporaine* (tomes XVI et XVII).

Collection in-4° Larousse

Grands ouvrages illustrés

Les grandes œuvres de fonds qui doivent être dans toutes les bibliothèques, entièrement renouvelées et présentées de la façon la plus moderne, la plus vivante et la plus attrayante : de magnifiques volumes édités dans un grand format (32 × 25 cm.), merveilleusement illustrés par la photographie, enrichis de hors-texte en noir et en couleurs et revêtus d'artistiques reliures.

Les ouvrages de cette collection peuvent être payés par versements mensuels ou versements bimestriels. Prix et conditions sur demande.

Littérature, Beaux-Arts

Histoire de la littérature française illustrée, *en deux volumes*, publiée sous la direction de J. BÉDIER, de l'Académie française, et P. HAZARD, professeur au Collège de France. Tableau complet de l'évolution littéraire en France, depuis les origines jusqu'à l'heure présente. 857 gravures, 54 hors-texte en noir et en couleurs.

L'Art, des origines à nos jours, *en deux volumes*, publié sous la direction de L. DESHAIRS, directeur de l'École nationale supérieure des Arts décoratifs. La plus nouvelle et la mieux illustrée des grandes histoires de l'Art. Près de 2 000 héliogravures, 12 hors-texte en couleurs.

Le Musée d'Art, *en deux volumes*. Études accompagnées de 2 000 gravures photographiques, 108 hors-texte.

Histoire

La Troisième République (1871 à nos jours), par Maxime PETIT, avec la collaboration de Albert PINGAUD, H. FROIDEVAUX, O. MARTIN, Aug. DUPOUY, E. SEDEYN, Fr. MAROTTE et du général IBOS. 900 héliogravures, 4 hors-texte et 2 cartes en couleurs.

Histoire de France illustrée (des origines à la fin de la guerre de 1870-1871), *en deux volumes*, par Maxime PETIT. 2 028 gravures photographiques, 43 planches en couleurs, 9 cartes en couleurs, 96 cartes en noir.

Histoire de l'Armée française, *des origines à nos jours*, par le général REVOL. 557 gravures, 37 planches en héliogravure, 4 planches en trichromie, une carte en couleurs.

COLLECTION IN-4° LAROUSSE (Suite)

Sciences

La Science, ses progrès, ses applications, *en deux volumes*, publiée sous la direction de G. URBAIN, de l'Institut, et M. BOLL, docteur ès sciences. Un ouvrage d'un intérêt exceptionnel et unique en son genre, aussi bien en France qu'à l'étranger : le tome premier retrace l'histoire des sciences mathématiques et physicochimiques, des origines jusqu'au XIXe siècle; le second est consacré au mouvement scientifique moderne : découvertes et inventions récentes, nouvelles théories qui ont bouleversé notre conception de l'univers. 2 360 héliogravures, 12 hors-texte en couleurs.

L'Air et sa conquête, par A. BERGET, docteur ès sciences, ancien président de la Société française de navigation aérienne. Physique et mécanique de l'air; météorologie; histoire de la navigation aérienne. 700 gravures, 276 cartes ou dessins, 26 planches, dont 20 héliogravures.

Le Ciel, *astronomie pour tous*, par A. BERGET. Grandes lois de l'astronomie; description des astres et des planètes; instruments et méthodes d'observation. 710 gravures photographiques, 275 cartes ou dessins, 2 cartes en couleurs, 8 hors-texte en couleurs, 16 hors-texte monochromes.

Sur les autres mondes, par Lucien RUDAUX. *(Paraît par fascicules. Prospectus spécimen sur demande.)*

La Terre, Géologie pittoresque, par Aug. ROBIN, correspondant du Muséum d'histoire naturelle. Phénomènes contemporains; grandes époques géologiques; fossiles. La Terre et l'homme. 760 gravures photographiques, 24 hors-texte, 53 tableaux de fossiles.

La Mer, par CLERC-RAMPAL. Océanographie (phénomènes de la mer, faune et flore sous-marines), navigation. 630 gravures photographiques, 16 hors-texte, 11 planches en couleurs, 316 cartes ou dessins.

Les Plantes, par J. COSTANTIN, membre de l'Institut, et F. FAIDEAU. 796 gravures photographiques, 338 dessins, 26 planches en couleurs, 14 planches en noir.

Les Animaux, par L. JOUBIN, membre de l'Institut, et Aug. ROBIN. 910 gravures photographiques, 1 110 dessins, 29 planches en couleurs, 18 planches en noir.

L'Homme, Races et Coutumes, par le Dr R. VERNEAU, professeur honoraire au Muséum d'histoire naturelle. 630 héliogravures, 37 hors-texte, 4 planches en trichromie, une double planche d'héliogravure en couleurs.

N. B. — *Ces trois derniers ouvrages forment ensemble la plus attrayante et la mieux documentée des grandes histoires naturelles.*

Histoire (Suite)

Histoire de la Marine française illustrée, par Ch. de La Roncière, ancien président de l'Académie de marine, et G. Clerc-Rampal, de l'Académie de marine. Préface de l'amiral Lacaze. 790 héliogravures, 6 planches en couleurs.

La France héroïque et ses Alliés (1914-1919), *en deux volumes,* par G. Geffroy, Léopold-Lacour, L. Lumet, 1 283 gravures, 51 planches et 28 cartes en noir et en couleurs.

Histoire générale des peuples, de l'antiquité à nos jours, *en trois volumes,* publiée sous la direction de Maxime Petit avec la collaboration de nombreux savants. 2 027 gravures photographiques, 96 planches et 74 cartes en noir et en couleurs.

Mythologie générale, publiée sous la direction de F. Guirand, agrégé de l'Université. Les croyances primitives de tous les peuples du globe. 882 héliogravures, 6 hors-texte en couleurs.

Géographie pittoresque

Nouvel Atlas Larousse, le monde entier décrit, expliqué, photographié; géographie physique, politique, économique, humaine. 110 cartes en couleurs ou en noir absolument à jour, 1 519 gravures photographiques.

La France, Géographie illustrée, *en deux volumes,* par P. Jousset. Géographie complète de notre pays. 1 942 gravures photographiques, 47 planches, 23 cartes et plans en noir, 31 cartes en couleurs.

Paris et ses environs, par A. Dauzat et F. Bournon. Le vrai Paris d'aujourd'hui, les beaux sites de l'Ile-de-France. 704 gravures photographiques, 3 planches en couleurs, 28 planches en noir, 30 cartes en couleurs.

La Suisse illustrée, par A. Dauzat. 635 gravures photographiques, 14 hors-texte en noir et en couleurs, 11 cartes hors texte en couleurs, 10 cartes en noir.

La Belgique illustrée, par L. Dumont-Wilden. 585 gravures photographiques, 4 hors-texte en couleurs, 16 planches en noir, 6 cartes en couleurs, 18 cartes et plans en noir.

L'Espagne et le Portugal illustrés, par P. Jousset, 772 gravures, 19 hors-texte, 10 cartes et plans en couleurs, 11 cartes en noir.

Les États-Unis, par Ch. Cestre, professeur à la Sorbonne. 593 gravures photographiques, 4 plans en noir, 5 cartes en couleurs, 12 hors-texte monochromes, 4 héliogravures en couleurs.

Le Japon illustré, par F. Challaye. 676 gravures photographiques, 4 hors-texte et 11 cartes en couleurs, 8 hors-texte en noir.

BIBLIOTHÈQUE LAROUSSE (Suite)

XIXe siècle

Littérature

Classiques Larousse

Une *collection nouvelle* des grands écrivains inscrits aux divers programmes de l'enseignement, remarquable par son prix très modique, sa présentation soignée et la documentation qui accompagne les textes.

Plus de 130 volumes parus :

La Chanson de Roland..... 1 vol.
Chansons de geste (extr.).. 1 vol.
Chrétien de Troyes : *Choix*. 1 vol.
Le Théâtre au moyen âge... 2 vol.
La Poésie lyrique.......... 1 vol.
Littérature morale......... 1 vol.
Les Chroniqueurs français. 1 vol.
Rabelais : *Pages choisies*.... 2 vol.
A. d'Aubigné : *Les Tragiques*. 1 vol.
Villon, Marot : *Poésies chois.* 1 vol.
Ronsard : *Poésies choisies*... 2 vol.
J. Du Bellay : *Œuvres choisies*. 1 vol.
Montaigne : *Essais*........ 2 vol.
Malherbe : *Poésies*......... 1 vol.
Balzac, Voiture : *Choix*.... 1 vol.
M. Régnier, Viau : *Choix*... 1 vol.
Corneille : *Théâtre*........ 10 vol.
Racine : *Théâtre*.......... 10 vol.
Boileau : *Œuvres*.......... 2 vol.
Molière : *Théâtre*......... 11 vol.
La Fontaine : *Fables choisies*. 2 vol.
Descartes : *De la méthode*... 1 vol.
La Rochefoucauld : *Maximes*. 1 vol.
Pascal : *Pensées — Provinciales*. 2 v.
La Bruyère : *Caractères*..... 2 vol.
Bossuet : *Oraisons — Sermons* 2 vol.
Fénelon : *Œuvres choisies*... 2 vol.
Mme de La Fayette : *La Princesse de Clèves*.................. 1 vol.
Mme de Sévigné : *Lettres ch.* 1 vol.
H. d'Urfé : *L'Astrée*....... 1 vol.
Furetière : *Roman bourgeois*.. 1 vol.
Scarron : *Le Roman comique*. 1 vol.
Saint-Simon : *Mémoires*.... 1 vol.
Buffon : *Pages choisies*..... 1 vol.
Regnard : *Théâtre*.......... 2 vol.
Spinoza : *L'Ethique*........ 1 vol.
Marivaux : *Jeu de l'Amour*. 1 vol.
Lesage : *Gil Blas*.......... 2 vol.
Abbé Prévost : *Manon Lescaut*. 1 v.
Florian : *Fables*.......... 1 vol.
Fontenelle : *Extraits*....... 1 vol.
Beaumarchais : *Théâtre*.... 3 vol.
Diderot : *Œuvres choisies*, 2 vol. — *L'Encyclopédie*........... 1 vol.
Montesquieu : *Pages choisies*. 2 vol.
Voltaire : *Œuvres diverses*... 5 vol.
J.-J. Rousseau : *La Nouvelle Héloïse*.................. 2 vol.
Bernardin de Saint-Pierre : *Paul et Virginie*............... 1 vol.
André Chénier : *Poésies*... 1 vol.
Vauvenargues : *Œuvres chois.* 1 vol.
Rivarol : *Discours sur l'universalité de la langue française*..... 1 vol.
Sedaine : *Le Philosophe*.... 1 vol.
Mme de Staël : *Œuvres chois.* 1 vol.
Augustin Thierry : *Choix*.. 2 vol.
Chateaubriand : *Œuvres ch.* 3 vol.
A. Comte : *Philosophie positive*. 1 vol.
Stendhal : *Racine et Shakespeare*................. 1 vol.
B. Constant : *Adolphe*..... 1 vol.
G. de Nerval : *Pages chois.* 1 vol.
G. Flaubert : *Mme Bovary*. 1 vol.
Balzac : *Romans*........... 4 vol.
Th. Gautier : *Pages choisies*. 1 vol.
A. de Musset : *Œuvres*...... 6 vol.
Lamartine : *Poèmes*........ 3 vol.
A. de Vigny : *Poésies choisies*. 1 vol.
G. Sand : *Œuvres choisies*... 4 vol.
Baudelaire : *Pages choisies*.. 1 vol.
Michelet : *Pages choisies*.... 2 vol.
Sainte-Beuve : *Port-Royal*.. 1 vol.

Littérature

Études, histoire littéraire, etc.

Les Trois Mousquetaires, par Alexandre DUMAS. *Édition de luxe* (22×28 cm.), texte intégral, soigneusement revisé, typographie élégante, 400 dessins et 4 planches en couleurs par M. VOX.

Notre-Dame de Paris, par Victor HUGO. *Édition de luxe* (22×28), texte intégral, soigneusement revisé, typographie élégante, 331 dessins et 4 planches en couleurs de F.-M. SALVAT.

Littérature française illustrée. (Voir plus haut : *Collection in-4° Larousse.*)

Histoire de la Littérature et de la Pensée françaises, *des origines à nos jours,* par Daniel MORNET, professeur à la Sorbonne. Le développement et l'évolution des idées, les doctrines, les écoles, l'histoire de la pensée et du goût. Un volume (13,5×20), illustré de 6 hors-texte (24 portraits).

Histoire de la Littérature et de la Pensée françaises contemporaines, par D. MORNET. Précis impartial et clair de la vie intellectuelle en France de 1870 à 1927. Un volume (13,5×20 cm.), illustré de 4 hors-texte.

La Littérature française aux XIXe et XXe siècles, par Ch. LE GOFFIC, de l'Académie française. Cet ouvrage présente le mouvement littéraire dans toute la complexité. Deux volumes (13,5×20 cm.), 76 gravures.

Grammaire Larousse du XXe siècle, publiée avec la collaboration de F. GAIFFE, professeur à la Sorbonne, E. MAILLÉ, professeur au lycée Montaigne, etc. Règles fondamentales et formes modernes de la langue française, les mots, leur syntaxe, la proposition, la phrase, la ponctuation, la stylistique et la sémantique. Un volume (13,5×20 cm.).

Chroniques de Lancelot (publiées dans *le Temps* en 1933 et 1934) par Abel HERMANT, de l'Académie française. Un véritable cours de style particulièrement adapté à la langue de notre temps. Un volume (12×18,5).

Comment on prononce le français, par Ph. MARTINON. Traité complet de prononciation pratique, d'après le bon usage. Un volume (12×18,5 cm.).

Comment on parle en français, par Ph. MARTINON. Les difficultés que présente la langue française écrite et parlée, et leur solution. Un volume (12×18,5 cm.).

Cours pratique de composition française, à l'usage des candidats aux examens des enseignements primaires supérieur, secondaire et supérieur par D. MORNET. La recherche des idées, la mise en ordre, l'expression. Un volume (ft 15×21 cm.).

La Littérature française enseignée par la dissertation, par Daniel MORNET. Un volume (13,5×20), à l'usage des candidats aux enseignements primaire supérieur, secondaire et supérieur. 400 sujets de dissertation choisis et classés de façon à exposer les idées fondamentales et à fournir à l'élève les éléments de ses travaux de rédaction. Un volume (13,5×20 cm.)

Histoire et Géographie

Toute la France, par E. Saillens. Vue d'ensemble très complète : géographie, histoire, vie sociale, intellectuelle, etc. Un vol. (13,5×20), 50 gravures, 1 carte en couleurs.

L'Université de Paris, *du moyen âge à nos jours.* Environ 225 héliogravures avec notices. Un volume (15×21).

Deux Cents Vues de Paris, 200 reproductions en héliogravure choisies et commentées par R. Bonfils.

L'Algérie, par A. Bernard. Le pays et les habitants, l'intervention française, l'organisation, la mise en valeur. Beau volume (15×21), 140 héliogravures, 8 cartes.

La Tunisie, par J. Despois. Beau volume (15×21 cm.). Le sol, les habitants, l'intervention de la France. 127 héliogravures, 7 cartes.

Le Maroc, par A. Terrier. Beau volume (15×21 cm.). Les races, l'intervention, la réorganisation, etc. 132 héliogravures, 7 cartes.

L'Indochine, par H. Gourdon. Beau volume (15×21 cm.). La nature et les hommes; l'intervention, etc. 140 héliogravures, 7 cartes.

Canada, par R. Rumilly et P. Bertin. Un album (15×21 cm.). 312 héliogravures, avec légendes en français et en anglais.

Georges Clemenceau, sa vie, son œuvre, par Gustave Geffroy et L. Lumet. Un volume in-4° (22×28), nombreuses gravures.

Sur la Démocratie : Neuf conférences de G. Clemenceau, rapportées par M. Ségard. Un volume (12×18,5).

La Marine française pendant la Grande Guerre, par G. Clerc-Rampal. Un volume (15×21 cm.), 90 gravures et 1 carte.

Histoire des États-Unis d'Amérique, par David-Saville Muzzey. Un volume (13,5×20), 25 gravures, 15 cartes.

Histoire de la Pologne, des origines à 1922, par Henri Grappin. Une histoire complète de la Pologne. Un volume (13,5×20 cm.), 2 cartes.

Histoire de la Russie, par L. Leger, membre de l'Institut. Un volume (f^t 13,5×20 cm.), 12 gravures, 2 cartes.

Prague, Ville d'Art, par J. Guenne. Beau volume de 190 pages (19×25) sur papier de luxe, illustré de 260 héliogravures d'art.

Paysages suisses, par Chr. Meisser. Recueil de 92 planches d'art en héliogravure. Un volume (22×28), reliure artistique bleu et argent.

Les Mille et une Vues de la Suisse, par S.-A. Schnegg. Les meilleurs écrivains suisses de ce temps, aidés d'artistes photographes, ont collaboré à ce magnifique ouvrage, entièrement illustré en héliogravure. Un volume grand in-4° (32×25).

Cet ouvrage peut être payé par mensualités. Demander prix et conditions

Grands ouvrages illustrés (voir, plus haut, *Collection in-4° Larousse*).

Sciences

La Science française. Exposé de la part que la France a apportée au progrès scientifique. *Deux volumes* (15×21 cm.).

L'Électricité à la ville, à la campagne, en auto, par M. BOLL, docteur ès sciences. Un volume (13,5×20), 174 gravures.

Qu'est-ce que... *le hasard? l'énergie? le vide? la chaleur? la lumière? l'électricité? le son? l'affinité?* par M. BOLL. Notions fondamentales sous une forme très accessible. Un volume (13,5×20), 152 gravures.

Pour connaitre... *la relativité, l'analogie, l'inertie, la gravitation, le choc, l'incandescence,* par M. BOLL. Un volume, 145 gravures.

Idées nouvelles sur... *l'électron, les piles, les dynamos, l'alternatif, l'induction, la radiophonie,* etc., par M. BOLL. Un volume (13,5×20), 160 gravures.

La Chimie au laboratoire et à l'usine, dans la nature et dans la vie, par M. BOLL. Un volume (13,5×20 cm.), 250 gravures.

La Chance et les jeux de hasard, par M. BOLL. (Loterie, boule, roulettes, dés, bridge, etc.). 155 gravures, 108 tableaux.

Topographie, par A. BERGET. Traité complet, d'une forme simple et pratique. Un volume (15×21 cm.), 375 gravures.

Ce qu'il faut savoir de l'aviation, exposé simple des problèmes que pose le développement de l'aviation. Un vol. (13,5×20 cm.), 115 gravures.

Manuel pratique d'astronomie, par L. RUDAUX. Initiation à l'astronomie. Un volume (13,5×20 cm.), 160 gravures.

Qu'est-ce que la Science? par F. LE DANTEC. D'intéressants aperçus sur la science. Un volume (13,5×20 cm.), illustré de 88 gravures.

L'Œuvre de Félix Le Dantec, par J. MOREAU. La méthode scientifique; les lois biologiques; les horizons philosophiques. Un vol. (13,5×20 cm.).

L'Évolution de l'Astronomie moderne, par P. BUSCO. Un vol. (13,5×20), 63 gravures dont 16 hors texte.

L'Évolution de la Physique au XIXe siècle, par M. COSMOVICI. Un volume (13,5×20), 8 portraits hors texte.

L'Évolution de la Chimie au XIXe siècle, par M. OSWALD. Un volume (13,5×20), 16 portraits hors texte.

Herbier classique, par F. FAIDEAU. 50 plantes caractéristiques des principales familles. Un volume (15×21 cm.), 162 gravures.

Champignons mortels et dangereux, par F. GUÉGUEN. Moyens de reconnaître les champignons. Un vol. (13,5×20 cm.), 7 planches en couleurs.

La Terre, tableaux de Géologie, par Aug. ROBIN. Deux tableaux synoptiques (63×80), en couleurs avec illustration (I. *Les Formations sédimentaires.* — II. *Géologie de la région parisienne.*)

Grands ouvrages illustrés (voir, plus haut, *Collection in-4e Larousse*).

Livres d'intérêt pratique

Larousse commercial (voir, plus haut, *Dictionnaires Larousse*).

Larousse ménager (voir, plus haut, *Dictionnaires Larousse*).

Mémento Larousse. Toutes les connaissances d'utilité journalière : grammaire, histoire, géographie, arithmétique, sciences, droit usuel, hygiène, savoir-vivre, recettes, etc. *(Vingt ouvrages en un seul.)* Beau volume de 730 pages (13,5 × 20), 900 gravures, etc.

Dictionnaire usuel de droit, par Max Legrand, *avec Supplément* 1934. Le droit par ordre alphabétique et à la portée du grand public. Un volume (15 × 21), de plus de 1 100 pages.

La Comptabilité commerciale, industrielle et domestique, par G. Soreph, expert. Un volume (13,5 × 20).

Le Parfait Secrétaire, par L. Chaffurin. Conseils, modèles et formules pour toutes lettres, actes et contrats. Un volume (11,5 × 18).

Lettres commerciales en quatre langues (Français-Anglais-Allemand-Espagnol), par M. Potel.

La Parfaite Ménagère, par Mme E. Jumau et Mme F. Herbet. Un volume de 450 pages (11,5 × 18), 117 gravures.

La Bonne Cuisine de Mme Saint-Ange, 500 menus et 800 recettes choisies, peu coûteuses et d'exécution facile. Un volume (11,5 × 18), 450 pages, 36 gravures.

Le Livre de Cuisine de Mme Saint-Ange. Plus de 1 300 recettes, cuisine de famille, entremets, pâtisserie, etc., grande cuisine; les tours de main des professionnels mis à la portée des maîtresses de maison. Un fort volume (13,5 × 20), 1 376 pages, 103 figures.

Le Livre de la jeune fille, par M. Dolidon, M. Munié, etc. Mémento des connaissances pratiques nécessaires à la femme.

Le Dessin de l'artisan et de l'ouvrier, par E. Chevrier. Traité pratique de dessin industriel. Un volume (13,5 × 20), illustré.

Peinture usuelle à la maison. Brochure in-8°, 11 gravures.

Harmonicolor. Disque d'harmonie des couleurs, permettant même aux non-initiés de réaliser des combinaisons agréables. Sous pochette.

Menuisier à la maison, au jardin, à la basse-cour, 40 gravures.

Le Guide mondain, par la Ctesse de Magallon. Art moderne du savoir-vivre. Un volume in-8°

Le Parfait Jardinier. Légumes, fruits, fleurs. Guide simple et pratique à l'usage des petits propriétaires. Un vol. (11,5 × 18), 450 pages, 160 grav.

La Chasse moderne, encyclopédie du chasseur. Beau volume de 682 pages (15 × 21), illustré de 488 gravures.

La Pêche moderne, encyclopédie du pêcheur. Beau volume de 600 pages (15 × 21), illustré de 680 gravures.

Pour devenir bon Pêcheur, par R. Guinot. Conditions d'une bonne pêche, mœurs des poissons, etc. Un volume (13,5 × 20), 118 gravures.

Le Chien de garde, de défense et de police, par Joseph Couplet. Un volume in-8° illustré de nombreuses gravures.

Livres pour la jeunesse

Albums en couleurs (6 à 10 ans), illustrés par G. HÉMARD, Gérard COCHET, M.-M. FRANC-NOHAIN, MALO-RENAULT, etc.

Les Livres roses pour la jeunesse. Pour les enfants de six à treize ans : contes, légendes, récits de la vie moderne, illustrés en couleurs. Deux volumes par mois (1er et 3e jeudi).

Les *Livres roses* se vendent également en volumes reliés. Chaque volume contenant huit récits complets sous cartonnage artistiquement décoré.

Livres bleus illustrés. Les plus beaux récits de tous les pays et de tous les temps. *Seize volumes* (18 × 25), illustrés d'artistiques dessins, riche reliure bleu et or.

Contes et gestes héroïques. Les grandes œuvres de la littérature universelle, traditions et légendes, 21 vol. (15 × 20), illustrés en noir et en couleurs : *Récits des Temps bibliques* (2 vol.). — *La Guerre de Troie.* — *Le Retour d'Ulysse* (d'après l'*Odyssée*). — *La Légende d'Hercule.* — *Contes de la Louve.* — *Autour de l'Enéide.* — *Vercingétorix.* — *Roland, le vaillant Paladin.* — *Les Infortunes d'Ogier le Danois.* — *Les Aventures de Huon de Bordeaux.* — *Flore et Blanchefleur.* — *Les Croisades.* — *Jeanne, la bonne Lorraine.* — *Les Infants de Lara.* — *Le Cid Campeador.* — *Guillaume le Conquérant.* — *Macbeth.* — *Rabelais*, en trois volumes, etc.

A quoi jouons-nous ? 100 jeux variés, 22 gravures. Un volume, couverture artistique.

Publications périodiques

Larousse mensuel illustré. Le *Larousse de l'actualité :* enregistre chaque mois dans l'ordre *alphabétique*, sous une forme documentaire, toutes les manifestations de la vie contemporaine; tient au courant de tout, forme la *mise à jour* indéfinie de toutes les encyclopédies. **Le numéro,** illustré (format 32 × 25), paraît le 1er jeudi du mois.

Les Nouvelles littéraires, artistiques et scientifiques. Le meilleur marché et le plus intéressant des périodiques littéraires. Inédits, questions d'actualité, études critiques, enquêtes et interviews, chroniques scientifique, artistique, dramatique, musicale, etc. **Le numéro,** format d'un quotidien à 6 colonnes (paraît tous les samedis).

Monde et voyages, revue de l'actualité universelle. Toutes les manifestations intéressantes de la vie dans le monde moderne : sciences, industries, mœurs, lettres, arts, théâtres, films, sports, mode, etc. Le numéro (21 × 30), illustré en héliogravure (le 1er et le 15 du mois).

EN VENTE CHEZ TOUS LES LIBRAIRES

Imp. Larousse, 1 à 9, rue d'Arcueil, Montrouge (Seine). — R. C. Seine 84.426. — (?-63).